УДК 532.517.2

КАРТЫ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ, ОПИСЫВАЕМЫЕ НЕОДНОРОДНЫМ УРАВНЕНИЕМ КАТЯЩЕЙСЯ ВОЛНЫ

Накоряков В. Е., Остапенко В. В., Барташевич М. В.

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00249, 12-01-00145) и гранта президента РФ НШ-5657.2014.8.

АННОТАЦИЯ

Построены семейства обобщенных решений неоднородного уравнения катящейся волны, моделирующие стекание пленочного конденсата и испаряющейся пленки жидкости по вертикальной стенке. Изучена эволюция во времени этих точных обобщенных решений. Построены карты режимов течения пленки жидкости по вертикальной поверхности теплообмена. Описан процесс формирования “капель” конечной амплитуды из малых возмущений на поверхности стекающей испаряющейся жидкой пленки.

ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамика двумерных пленочных течений достаточно хорошо изучена [1,2]. Результаты фундаментальных исследований представлены в работах П. Л. Капицы, В. Я. Шкадова, В. Е. Накорякова, С. В. Алексеенко, Е. А. Демехина, В. В. Пухначева, О. Ю. Цвелодуба, Ю. Я. Трифонова. Однако чрезвычайно актуальными остаются многие вопросы, связанные с интенсификацией тепломассообмена, что, в частности, важно при усовершенствовании технологий пленочного охлаждения поверхностей. Пленочные течения реализуются в различных массообменных аппаратах, таких как абсорберы, испарители, конденсаторы, десорберы. Особый интерес представляют исследования утоньшений и разрывов пленок на нагреваемой поверхности, появления и эволюции сухих пятен. Волны, образующиеся в стекающей пленке уже при числах Рейнольдса порядка нескольких единиц, интенсифицируют теплообмен. Известен механизм интенсификации тепломассообмена последова-тельностью уединенных поверхностных волн с достаточно большими плоскими участками “остаточного” слоя между ними.

Многие исследования посвящены изучению катящихся волн на наклонной и вертикальной поверхности, и их устойчивости [3-7]. Предполагается, что такие волны не зависят от поверхностного натяжения и могут существовать в ламинарном и в турбулентном режимах течения. Для возникновения катящихся волн важен достаточный наклон поверхности и малое влияние поверхностного натяжения. Катящиеся волны на поверхности испаряющихся и конденсирующихся тонких пленок жидкости интересны своей временной эволюцией – возможностью их полного поглощения “остаточным” слоем при конденсации (стабилизирующее влияние конденсации) или утончением пленки между гребнями волн и переходом в систему стекающих уединенных “капель” при испарении (дестабилизирующее влияние испарения).

В работах [8,9] было представлено неоднородное уравнение катящейся волны, полученное аналогично [3] в рамках длинноволнового приближения и линейного профиля температуры. Данное уравнение приближенно описывает стекание пленочного конденсата и испаряющейся пленки жидкости по вертикальной

© Накоряков В.Е., Остапенко В.В., Барташевич М.В.

поверхности теплообмена. В [8,9] были приведены и проанализированы семейства обобщенных решений уравнения катящейся волны, в которых бегущие волны сопрягались через сильный и слабый разрывы друг с другом или с "остаточной" толщиной.

В настоящей работе изучается эволюция во времени точных обобщенных решений неоднородного уравнения катящейся волны. Построены карты режимов течения пленки жидкости по вертикальной поверхности теплообмена для случая конденсации и испарения. Описан процесс формирования "капель" конечной амплитуды из малых возмущений на поверхности стекающей испаряющейся жидкой пленки.

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КАТЯЩЕЙСЯ ВОЛНЫ

Рассмотрим уравнение катящейся волны, записанное в безразмерных переменных относительно толщины пленки жидкости h [8,9]

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{3}\frac{\partial h^3}{\partial x}=\frac{\beta}{h} \qquad (1)$$

где $\beta = b\nu/(gl^3)$ параметр, в котором l – характерный масштаб длины, ν – кинематическая вязкость, g – ускорение свободного падения, $b=(\lambda\Delta T)/(\rho r)=const$, λ – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность жидкости, r – теплота фазового перехода, $\Delta T = T_s - T_w$, T_s - температура насыщения, T_w - температура стенки.

Решение уравнения (1), зависящее только от временной переменной t, когда $h_x = 0$, имеет вид

$$h = H(t,\eta) = \sqrt{2\beta t+\eta^2}\ .$$

Это уравнение описывает изменение с течением времени начальной толщины пленки $H(0,\eta)=\eta$. При $\beta>0$, т. е. при конденсации, толщина пленки возрастает, а при $\beta<0$, т. е. при испарении, толщина пленки убывает и за время $T(\eta,\beta)=\eta^2/(2|\beta|)$ остаточный слой начальной глубины η полностью испаряется. Функция скорости изменения толщины пленки

$$H_t(t,\eta,\beta)=\frac{\beta}{\sqrt{2\beta t+\eta^2}}$$

при $\beta>0$ является монотонно убывающей по обеим переменным t и η, а при $\beta<0$ – монотонно убывающей по t и монотонно возрастающей по η. Уравнение (1) допускает автомодельные решения типа бегущих волн

$$h = h_{\pm}\left(x,t,x_0,V\right) = \sqrt{V\pm 2\sqrt{\beta(\xi-x_0)}}\ ,$$

зависящие от переменной $\xi = x - Vt$, где V – скорость волны.

КАТЯЩИЕСЯ ВОЛНЫ В РЕЖИМЕ КОНДЕНСАЦИИ

Точные решения, моделирующие эволюцию уединенной катящейся волны при $\beta>0$, т. е. в случае конденсации, задаются формулой

$$h=h(x,t)=\begin{cases} H(t,\eta_l,\beta), & -\infty<x\le a(t),\\ h_+(x,t,x_0^+,V_+,\beta), & a(t)\le x<b(t),\\ h_-(x,t,x_0^-,V_-,\beta), & b(t)\le x\le c(t),\\ H(t,\eta_r,\beta), & c(t)\le x<+\infty \end{cases} \qquad (2)$$

и представляют собой бегущие со скоростями V_+ и V_- волны повышения h_+ и понижения h_-, сопряженные с остаточными глубинами $H(t,\eta_l,\beta)$, $H(t,\eta_r,\beta)$ через слабые разрывы на линиях $x=a(t)=f(t,\eta_l,x_0^+,V_+,\beta)$ и $x=c(t)=f(t,\eta_r,x_0^-,V_-,\beta)$, где

$$f(t,\eta,x_0,V,\beta)=\beta t^2+\eta^2 t+x_0+\left(\eta^2-V\right)^2/(4\beta)\ . \qquad (3)$$

Предположим, что на некотором начальном временном интервале $t\in[0,\tau]$ решение (2) является непрерывным, т. е на линии сопряжения $x=b(t)$ бегущих волн h_+ и h_- выполнено условие согласования

$$h_+\left(b(t),t,x_0^+,V_+,\beta\right)=h_-\left(b(t),t,x_0^-,V_-,\beta\right)=h_b(t), \qquad (4)$$

из которого следует, что

$$b(t)=\frac{\alpha_1^2(t)+2\omega\alpha_2(t)+\omega^2}{4\omega},\quad \omega=\frac{\left(V_--V_+\right)^2}{4\beta}, \qquad (5)$$

где

$$\alpha_1(t)=x_0^- - x_0^+ + (V_- - V_+)t\ ,$$

$$\alpha_2(t)=x_0^- + x_0^+ + (V_- + V_+)t\ .$$

Для существования непрерывного решения (2) при $V_+>0$ (рис. 1) его входные параметры η_l, η_r, V_+, V_-, x_0^+, x_0^- должны удовлетворять условиям

$$V_+<V_-,\ \sqrt{V_+}\le\eta_l<h_b(0),\ 0\le\eta_r<h_b(0), \qquad (6)$$

а также неравенству

$$h_+\left(x_0^-,t,x_0^+,V_+,\beta\right)<\sqrt{V_-} \quad \Leftrightarrow \quad x_0^- - x_0^+ < \omega, \qquad (7)$$

при $x_0^- \ge x_0^+$ или неравенству

$$h_-\left(x_0^+,t,x_0^-,V_-,\beta\right)>\sqrt{V_+} \quad \Leftrightarrow \quad x_0^+ - x_0^- < \omega, \qquad (8)$$

при $x_0^+ \ge x_0^-$. Неравенства (7) и (8) можно заменить на единое условие

$$|\, x_0^- - x_0^+ \,| < \omega = \frac{\left(V_- - V_+\right)^2}{4\beta}. \qquad (9)$$

Для существования непрерывного решения (2) при $V_+ \le 0$ (рис. 2) его входные параметры должны удовлетворять условиям $V_- > 0,\ h_b(0) > \eta_l, \eta_r \ge 0$ неравенству (7) при $x_0^- > x_1^+ = x_0^+ + V_+^2/(4\beta) > x_0^+$ и неравенству

$$x_0^- - x_0^+ > \frac{V_+^2 - V_-^2}{4\beta}. \qquad (10)$$

Односторонние неравенства (7) и (10) эквивалентны следующему двустороннему неравенству

$$\frac{V_+^2 - V_-^2}{4\beta} < x_0^- - x_0^+ < \frac{\left(V_- - V_+\right)^2}{4\beta}.$$

Непрерывное решение (2) существует до момента времени T_1, в который точка пересечения бегущих волн h_+ и h_- выходит на границу области существования волны понижения h_-, что приводит к градиентной катастрофе на вершине гребня (рис. 1-2). Значение

$$T_1 = \frac{x_0^- - x_0^+ - \omega}{V_+} = \frac{1}{V_+}\left(x_0^- - x_0^+ - \frac{\left(V_- - V_+\right)^2}{4\beta}\right) \qquad (11)$$

определяется как корень уравнения

$$h_+\left(x_0^-,t,x_0^+,V_+,\beta\right) = \sqrt{V_-}.$$

При $t > T_1$ на вершине капли формируется сильный разрыв, который постепенно поглащает волну понижения h_-. В результате с течением времени при $\eta_l > \eta_r$ (рис. 1) решение (2) переходит в изолированный силыный разрыв, распростра-няющийся со скоростью $D\left(H(t,\eta_l,\beta), H(t,\eta_r,\beta)\right)$, где $D(h_1,h_0) = \left(h_1^2 + h_1 h_0 + h_0^2\right)/3$ и соединяющий растущие остаточные глубины $H(t,\eta_l,\beta)$ и $H(t,\eta_r,\beta)$.

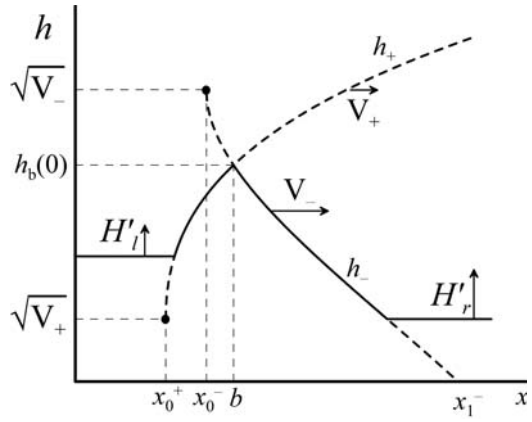

Рис.1 “Карта” решения (2) при $V_+ > 0, \beta > 0$

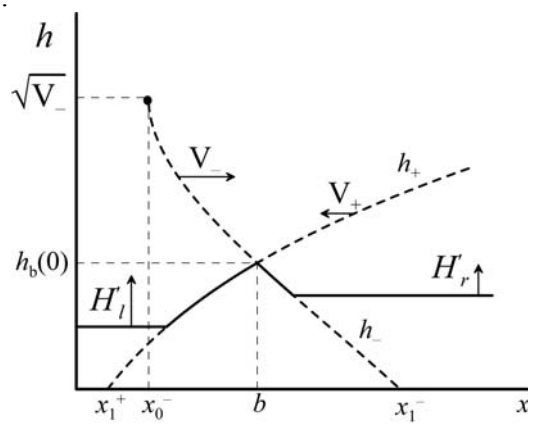

Рис.2 “Карта” решения (2) при $V_+ < 0, \beta > 0$.

КАТЯЩИЕСЯ ВОЛНЫ В РЕЖИМЕ ИСПАРЕНИЯ

Точные решения, моделирующие эволюцию уединенной катящейся волны при $\beta < 0$, т. е. в случае испарения, задаются формулой

$$h = \tilde{h}(x,t) = \begin{cases} \tilde{H}(t,\eta_l,\beta), & -\infty < x \le a(t), \\ h_-(x,t,x_0^-,V_-,\beta), & a(t) \le x < b(t), \\ h_+(x,t,x_0^+,V_+,\beta), & b(t) \le x \le c(t), \\ \tilde{H}(t,\eta_r,\beta), & c(t) \le x < +\infty \end{cases} \qquad (12)$$

и представляют собой бегущие со скоростями V_- и V_+ волны повышения h_- и понижения h_+, сопряженные с глубинами $\tilde{H}(t,\eta_l,\beta)$, $\tilde{H}(t,\eta_r,\beta)$ через слабые разрывы на линиях $x = a(t) = \tilde{f}(t,\eta_l,x_0^-,V_-,\beta)$ и $x = c(t) = \tilde{f}(t,\eta_r,x_0^+,V_+,\beta)$, где

$$\tilde{H}(t,\eta,\beta) = \begin{cases} H(t,\eta,\beta), & 0 \le t \le T(\eta,\beta), \\ 0, & t \ge T(\eta,\beta), \end{cases} \qquad (13)$$

$$\tilde{f}(t,\eta,x_0,V,\beta)=\begin{cases} f(t,\eta,x_0,V,\beta), 0\le t\le T(\eta,\beta), \\ f(t,0,x_0,V,\beta), \quad t\ge T(\eta,\beta), \end{cases} \quad (14)$$

$f(t,\eta,x_0,V,\beta)$ – функция, задаваемая формулой (3). Из формул (12)–(14) следует, что полное испарение остаточного слоя слева от катящейся волны, т. е. при $x\le a(t)$, происходит в момент времени $T(\eta_l,\beta)$, а справа от нее, т. е. при $x\ge c(t)$, в момент времени $T(\eta_r,\beta)$.

Будем считать, что на некотором начальном временном интервале $[0,\tau]$ решение (12) является непрерывным, т. е на линии сопряжения $x=b(t)$ бегущих волн h_+ и h_- выполнено условие согласования (4), в котором функция $b(t)$ задается формулой (5). Для существования такого решения (12) при $V_+>0$ (рис. 3) его входные параметры должны удовлетворять неравенствам

$$\begin{aligned} &V_+<V_-,\ 0<\eta_l\le h_b(0), \\ &\sqrt{V_+}<\eta_r\le h_b(0), \\ &|x_0^- - x_0^+|<\frac{\left(V_- - V_+\right)^2}{4|\beta|} \end{aligned} \quad (15)$$

а при $V_+\le 0$ (рис. 4) – следующим неравенствам

$$\begin{aligned} &V_->0, \\ &h_b(0)\ge\eta_l,\eta_r>0, \\ &\frac{V_+^2-V_-^2}{4\beta}>x_0^- - x_0^+>\frac{\left(V_- - V_+\right)^2}{4\beta} \end{aligned} \quad (16)$$

Численные расчеты показали, что при $\beta<0$ и $\eta\le h_b(0)$ выполнены условия

$$H_t(t,\eta,\beta)<h_b'(t)\ \ \forall t>0:\ H(t,\eta,\beta)>0, \quad (17)$$

означающие, что в решении (12) остаточные глубины $H(t,\eta_l,\beta)$ и $H(t,\eta_r,\beta)$ убывают быстрее, чем глубина $h_b(t)$ на вершине катящейся волны.

При $V_+>0$ (см. рис. 3, на котором представлен случай $\eta_l<\eta_r$). решение (12) является непрерывным на временном интервале $(0,\tilde{T}_1)$, где в момент времени $\tilde{T}_1=\left(V_+^2-\eta_r^2\right)/\left(2\beta\right)$, определяемый из уравнения $H(\tilde{T}_1,\eta_r,\beta)=\sqrt{V_+}$, остаточная глубина $H(t,\eta_r,\beta)$ достигает нижней границы существования волны понижения h_+ (рис. 3).

При $t=\tilde{T}_1$ слабый разрыв непрерывного решения (12), расположенный на линии $x=c(t)$ – правой границе волны понижения h_+, переходит в сильный разрыв, распространяющийся со скоростью

$$c'(t)=D_c(t)=D\left(\sqrt{V_+},\tilde{H}(t,\eta,\beta)\right). \quad (18)$$

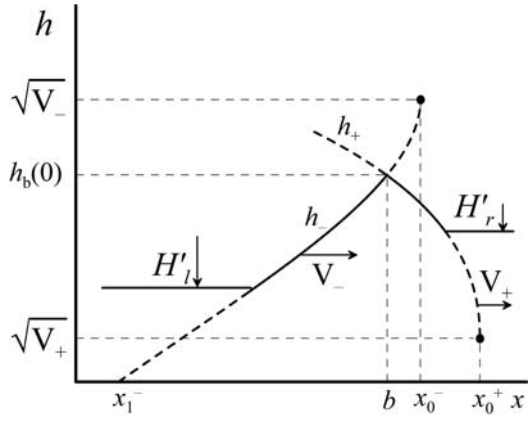

Рис.3 “Карта” решения (12) при $V_+>0,\beta<0$.

Поскольку $V_->V_+>D_c(t)$, то при $t>\tilde{T}_1$ волна повышения h_- и сильный разрыв на линии $x=c(t)$ постепенно поглощают волну понижения h_+ и в некоторый момент времени $\tilde{T}_2>\tilde{T}_1$ волна h_+ полностью исчезает. В результате в момент времени $\tilde{T}_2$ разрывное решение (12) переходит в разрывное решение

$$h=\begin{cases} \tilde{H}(t,\eta_l,\beta), & -\infty<x\le a(t), \\ h_-(x,t,x_0^-,V_-,\beta), & a(t)\le x<c(t), \\ \tilde{H}(t,\eta_r,\beta), & c(t)\le x<+\infty, \end{cases} \quad (19)$$

в котором сильный разрыв на линии $x=c(t)$ распространяется со скоростью

$$c'(t)=D\left(h_+(c(t),t,x_0^+,V_+,\beta),\tilde{H}(t,\eta,\beta)\right) \quad (20)$$

по остаточной глубине $H(t,\eta_r,\beta)>0$ при $t<T(\eta_r,\beta)$ и по сухой стенке при $t\ge T(\eta_r,\beta)$.

Поскольку $\eta_l<\eta_r$, то остаточный слой слева от катящейся волны испаряется быстрее, чем остаточный слой справа от нее и поэтому при $t>T(\eta_r,\beta)$ по обе стороны от гребня стенка становится сухой т. е. в формуле (19) $H(t,\eta_l,\beta)=H(t,\eta_r,\beta)=0$ В таком виде решение (19) существует до полного испарения жидкости в катящейся волне.

В случае $V_+\le 0$ решение (12), удовлетворяющее условиям (16), остается непрерывным при всех $t>0$ до полного испарения жидкости. При условии $\eta_l>\eta_r$, который приведен на рис. 4, на временном интервале $(0,T(\eta_r,\beta))$ по обе стороны от гребня остаточные слои имеют конечную глубину. В момент времени $T(\eta_r,\beta)$ остаточный слой $H(t,\eta_r,\beta)$ полностью испаряется и на временном интервале $[T(\eta_r,\beta),T(\eta_l,\beta))$ справа от катящейся волны стенка является сухой, а слева от нее остаточный слой имеет конечную глубину.

В момент времени $T(\eta_l,\beta)$ остаточный слой $H(t,\eta_l,\beta)$ слева от катящейся волны также полностью испаряется, и при $t \ge T(\eta_l,\beta)$ "капля" продолжает распространяться по сухой стенке.

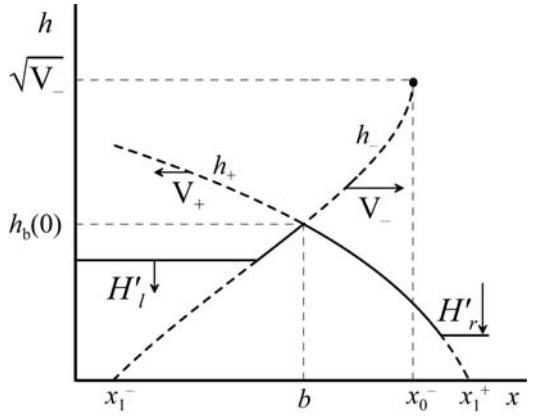

Рис.4 "Карта" решения (12) при $V_+ < 0, \beta < 0$.

На рис.5 на восемь последовательных моментов времени приведено решение задачи Коши для уравнения (1) с периодическими начальными условиями

$$\begin{aligned} &\bar{h}(x,0) = \tilde{h}(x,0) \quad \forall x \in [x_*, x_* + X], \\ &\bar{h}(x+X,0) = \bar{h}(x,0) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{21}$$

Начальная амплитуда катящихся волн вида (12) достаточно мала, т. е. $h_b(0) - \eta \ll 1$. Это решение является непрерывным (линии 1-3 на рис. 5) на временном интервале $(0, \bar{T}_1)$, где $\bar{T}_1 = \left(V_+^2 - \eta^2\right) / \left(2\beta\right)$ – момент времени, определяемый из уравнения $H(\bar{T}_1, \eta, \beta) = \sqrt{V_+}$, в который остаточная глубина $H(t,\eta,\beta)$ достигает нижней границы существования волны понижения h_+. При $t > \bar{T}_1$ на передних фронтах катящихся волн формируются сильные разрывы (линии 4-8 на рис. 5).

На временном интервале $\left(\bar{T}_1, T(\eta,\beta)\right)$ последовательность катящихся волн с сильными разрывами на их передних фронтах стекает по остаточному слою, глубина которого убывает (линии 4-6 на рис. 5). При $t = T(\eta,\beta)$ остаточный слой полностью испаряется (линии 7 на рис. 5) и при $t > T(\eta,\beta)$ капли продолжают распространяться по сухой стенке (линия 8 на рис. 5).

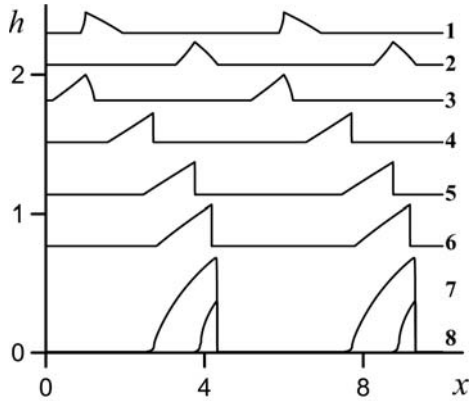

Рис.5 Решение задачи Коши для уравнения (1) с периодическими начальными условиями (21) на восемь последовательных моментов времени $t = 0,\ 0.5,\ 1.0,\ 1.5,\ 2.0,\ 2.35,\ 2.645,\ 2.8$ при следующих значениях входных параметров $\beta = -1$, $V_+ = 3.0$, $V_- = 6.0$, $\eta_l = \eta_r = 2.3$, $x_0^+ = 4.25$, $x_0^- = 2.0$, $x_* = 0.875$, $X = 5.0$.

При стремлении глубины жидкости к нулю скорость испарения неограниченно возрастает, а скорость распространения сильного разрыва стремится к нулю. Поскольку глубина остаточного слоя уменьшается быстрее, чем глубина жидкости на вершине катящейся волны, это приводит к заметному увеличению амплитуды волны к моменту полного испарения остаточного слоя, по сравнению с ее начальной амплитудой при $t = 0$. Последнее означает, что предложенная модель позволяет моделировать процесс формирования катящихся волн конечной амплитуды из малых возмущений на поверхности стекающей испаряющейся жидкой пленки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена модельная задача о стекании тонкого слоя жидкости по вертикальной стенке с учетом тепломассопереноса на межфазной поверхности в режиме катящихся волн. Представлены семейства обобщенных решений уравнения катящейся волны как в случае конденсации, так и в случае испарения на межфазной поверхности. Построены карты режимов течения пленки жидкости по вертикальной поверхности теплообмена. Изучен процесс эволюции различных типов точных решений, представляющих собой последова-тельность бегущих волн, сильных и слабых разрывов и остаточных слоев различной глубины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волновое течение пленок жидкости. - Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1992. – 256 с.

   S.V. Alekseenko, V.E. Nakoryakov, B.G. Pokusaev, Wave Flow of Liquid Films. - New York : Begell House. – 1994. – 335 P.

2. Chang H.C., Demekhin E.A. Complex wave dynamics on thin films. – Amsterdam, Elsevier, 2002. – 402 p.

3. Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Волны на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости //ПМТФ – 1973. № 2, с. 109-113.

   V. E. Nakoryakov, I. R. Shreiber, Waves on the surface of a thin layer of viscous liquid – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1973, V. 14, No. 2, P. 237-241.

4. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Алексеенко С.В. Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости // Инженерно-физический журнал – 1976, Т.30, №. 5, С. 780-785.

   V.E. Nakoryakov, B.G. Pokusaev, S.V. Alekseenko, Stationary two-dimensional rolling waves on a vertical film of fluid – Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 1976. – V.30, No. 5. – P.517-521.

5. Шапарь Е.М., Калайдин Е.Н., Демехин Е.А. О катящихся уединенных волнах на наклонной поверхности и их устойчивости // Теплофизика и аэромеханика – 2006.№ 1, С. 83-92.

   E. M. Shapar, E. N. Kalaidin, E. A. Demekhin, On the solitary roll-waves on an inclined plane and their stability // Thermophysics and Aeromechanics. – 2006, V. 13, No. 1, P. 75-83.

6. Бучин В.А., Шапошникова Г.А. Течение мелкой воды с периодической системой скачков по вертикальной поверхности// Доклады РАН – 2009, Т. 426, № 3, с. 321-324.

   V.A. Buchin, G.A. Shaposhnikova, Flow of shallow water with a periodic system of jumps over a vertical surface // Doklady Physics. –2009, V.54, N.5, P.248-251.

7. Буддал А., Ляпидевский В. Ю. Уравнения модуляций для волновых течений пленки жидкости по вертикальной стенке // Доклады РАН – 2012, Т. 442, № 1, с. 1–5.

   A. Boudlal, V.Yu. Liapidevskii, Modulation equations for wave flows of a fluid film along a vertical wall, Doklady Physics. – 2012, V. 57, N. 1, P. 23–28.

8. Nakoryakov V. E., Ostapenko V.V., Bartashevich M.V. Heat and mass transfer in the liquid film on a vertical wall in roll-wave regime // International Journal of Heat and Mass Transfer. - 2012. - V.55, Is. 23-24, P. 6514-6518.

9. Накоряков В.Е., Остапенко В.В., Барташевич М.В. Исследование катящихся волн на поверхности стекающей пленки конденсата // Доклады РАН – 2014, Т. 454, № 5, с.540–544.

   V. E. Nakoryakov, V. V. Ostapenko and M. V. Bartashevich. Investigation into roll waves on the surface of a condensate falling film // Doklady Physics. – 2014, V. 59, No. 2, P. 94–98.

10. Остапенко В.В. Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды. Новосибирск. Изд-во НГУ, 2014. 234 с.

    V.V. Ostapenko, Hyperbolic systems of conservation laws and their application to the shallow water theory. Novosibirsk, NSU, 2014. 234 P.