УДК 536.24

# ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ МНОГОРЕЗОНАНСНОЙ СРЕДЫ ЛОРЕНЦА С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ МЕТОДОМ ОЗТР

**Гасенко В.Г.**

*Институт теплофизики им.С.С.Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия*

Работа поддержана грантом РФФИ № 14-02-01009а

**АННОТАЦИЯ**

Получено нелинейное волновое уравнение высокого порядка для полидисперсной газожидкостной смеси с несколькими размерами пузырьков как частного случая многорезонансной среды Лоренца с квадратичной нелинейность. Для волн, распространяющихся в одну сторону уравнение приведено к полидисперсному уравнению Кортевега-де-Вриза (ПКдВ), которое в пределе длинных волн переходит в уравнение КдВ, а для волн огибающих – в нелинейное уравнения Шредингера (НУШ), если нелинейность кубическая. В двухрезонасном случае показана полная интегрируемость уравнения ПКдВ с квадратичной нелинейностью: найдена пара Лакса и формы безотражательных потенциалов.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В гомогенной модели газожидкостной смеси [1] последняя представляет собой сплошную среду с внутренней структурой, состоящей из осцилляторов – пузырьков газа. При этом доминирующая нелинейность газожидкостной смеси вызвана нелинейность колебаний газовых пузырьков, а не гидродинамической нелинейностью. Уравнение движения в этом случае достаточно брать в акустическом приближении

$$p_{xx} - \frac{1}{c_f^2} p_{tt} = -\frac{\gamma}{c_0^2} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i v_{itt}, \qquad (1)$$

а уравнения Рэлея свести к гармоническому осциллятору с нелинейной внешней силой

$$v_{itt} + \delta_i v_{it} = \frac{w_i^2}{\gamma} \left[ (1+v_i)^{-\gamma} - 1 - p \right]. \qquad (2)$$

Здесь $p$ − безразмерное возмущение давления, $c_f$ и $c_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0 \varphi_0$ − скорости звука в чистой жидкости и в газожидкостной смеси соответственно, $\alpha_i = \varphi_i / \varphi_0$, $\varphi_0 = \sum \varphi_i$ и $v_i$ − относительные объемные газосодержания и возмущение объема соответственно, $w_i^2 = 3\gamma p_0 / \rho_0 R_i^2$ − резонансные частоты пузырьков с радиусами $R_i$, $\delta_i = 2\mu w_i^2 / c_0^2$ − коэффициент затухания, определенный через эффективный коэффициент диссипации $\mu$, учитывающий вязкость жидкости, потери колебаний пузырьков на акустическое излучение и тепловые потери, $\gamma$ показатель адиабаты. Выражая возмущение объема из (2) как нелинейную функцию от $p$ с точностью до квадратичных членов с использованием оператора $D = \partial / \partial t$

$$v_i = -\frac{w_i^2}{\gamma} \frac{p - \frac{\gamma+1}{2\gamma} p^2}{D^2 + \delta_i D + w_i^2}$$

и подставляя в (1), получаем следующее нелинейное волновое уравнение для полидисперсной газожидкостной смеси с $N$ размерами пузырьков

$$p_{xx} - \frac{p_{tt}}{c_f^2} + \frac{1}{c_f^2} \sum_{i=1}^{N} w_{pi}^2 \frac{p_{tt} - c_0^2 \frac{\gamma+1}{2\gamma} p_{xx}^2}{D^2 + w_i^2 - \delta_i D} = 0 \qquad (3)$$

где стандартным образом временная производная нелинейного члена замерена пространственной. Отметим, что для электромагнитных (световых) волн в диэлектриках с учетом нелинейного эффекта Керри уравнение для амплитуды электрического поля будет совпадать с (3), но с кубической, а не квадратичной нелинейностью. Дисперсионное уравнение для бегущих волн $p \sim \exp(jwt \pm jkx)$, следующее из (3), полностью совпадает с дисперси-

© Гасенко В.Г.

онным уравнением для многорезонансной среды Лоренца

$$k^2 = \frac{w^2}{c_f^2}\left(1 - \sum_{i=1}^{N} \frac{w_{pi}^2}{w^2 - w_i^2 - iv_i w}\right) \qquad (4)$$

где $w_{pi}^2 = \alpha_i w_i^2 c_f^2 / c_0^2$ – «плазменные» частоты. Фазовая скорость $V_{ph}(w) = w/k$ на основе (4) в бездиссипативном случае для модельной двухрезонансной среды Лоренца показана на рис.1. В общем случае вместо 3-х имеем $N+1$ ветви, разделенные окнами непрозрачности. Целью данной работы является исследование решений нелинейного волнового уравнения (3) и его предельных случаев для многорезонансных сред Лоренца с квадратичной нелинейностью.

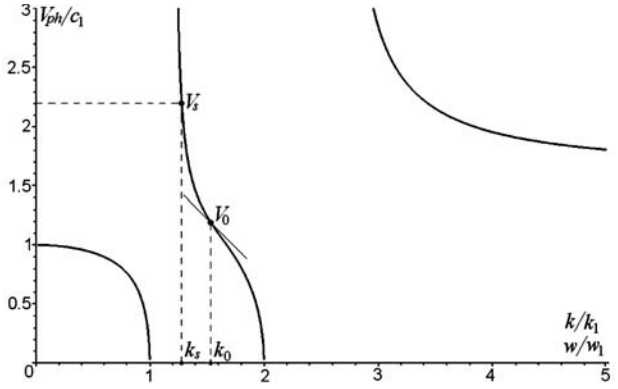


Рис.1 Дисперсионные кривые для модельной двухрезонансной бездиссипативной среды Лоренца.

## ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЛИДИСПЕРСНОГО КДВ И НУШ

Для длинных волн, распространяющихся по низкочастотной ветви в одном направлении (3) переходит в известное уравнение Кортевега-де-Вриза (КдВ) для скорости $u = pc_1(\gamma+1)/2\gamma$

$$u_t + c_1 u_x + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \qquad (5)$$

которое полностью интегрируется методом обратной задачи теории рассеяния (ОЗТР). Здесь $c_1^{-2} = c_f^{-2} + c_0^{-2}$, $\beta = c_1^3/2w_1^2$. Если спектр волны ограничен областью одной ветви, то волны огибающей такого пакета будут описываться в случае кубической нелинейности нелинейным уравнение Шредингера (НУШ). Чтобы корректно показать это получим аналог (3) для волн распространяющихся в одном направлении. Для этого проинтегрируем (5) как линейное неоднородное уравнение относительно $u_x$ и перепишем результат в операторном виде

$$u_x = -\int_0^x \frac{k_1}{c_1}\sin[k(x-x')](u_t + uu_{x'})dx' = -\frac{u_t + uu_x}{c_1(D^2 + k_1^2)}$$

где $D = \partial/x$, $k_1^2 = 2w_1^2/c_1^2$. Очевидно, что этот результат можно обобщить с учетом всех размеров пузырьков в виде полидисперсного уравнения КдВ (ПКдВ)

$$u_x + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{u_t + uu_x}{c_1(D^2 + k_i^2)} = 0,\ k_i^2 = \frac{2w_i^2}{c_1} \qquad (6)$$

Дисперсионное уравнение для фазовой скорости

$$V_{ph}^{-1}(k) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i}{c_1 - \beta_i k^2} \qquad (7)$$

будет иметь $N$ отдельных ветвей как и (4) при $c_f = \infty$. Переписывая (6) для Фурье образов $U(k) = \int ue^{-jkx}dx$ получим простое уравнение

$$U_t + jkV_{ph}(k)U + U^2 = 0 \qquad (8)$$

Здесь $U^2$ – интеграл свертки. Если нас интересуют волны огибающих с несущим волновым вектором $k_0$, лежащим на одной из ветвей в точке перегиба, то с большой точностью (7) аппроксимируется линейной функцией $V_{ph} = V_0 - a(k - k_0)$ и уравнение ПКдВ (6) в системе отсчета, движущейся со скоростью $V_0 + ak_0$ принимает вид

$$u_t + jau_{xx} + uu_x = 0 \qquad (9)$$

В случае квадратичной нелинейности как в газожидкостной смеси для волн огибающих $u \sim A(x,t)\cos k_0 x$ уравнение не имеет смысла, поскольку нелинейность генерирует только вторую гармонику не вписывающуюся в окно прозрачности.

В случае же кубической нелинейности (с членом $4u^2u_x$ в (6) вместо $\boldsymbol{u}_x$) получаем $4\cos^3 k_0 x = 3\cos k_0 x + \cos 3k_0 x$, т.е. в окне прозрачности остается только первая гармоника и при замене $\partial/\partial x = jk_0$ в нелинейном члене (9) принимает вид НУШ для комплексной скорости

$$ju_t - au_{xx} - k_0|u|^2 u = 0$$

## ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУХРЕЗОНАНСНОГО КДВ

Рассмотрим наиболее интересный случай двухрезонансной среды Лоренца, представив (6) не в операторной, а в дифференциальной форме в системе координат, движущейся со скоростью

$$c_3 = c_1(\alpha_1\beta_2^2 + \alpha_2\beta_1^2)/\beta_3$$

$$(u_t + uu_x + \beta u_{xxx})_{xx} + k_0^2(u_t + uu_x + \beta u_{xxx}) = hu_x, \quad (10)$$

где $\beta = \beta_1\beta_2/\beta_3$, $\beta_3 = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$, $k_0^2 = c_1/\beta_3$, $h = (c_3 - c_1)k_0^2$. Нестационарные решения (10), найденные численно оказываются существенно отличными от решений КдВ. На рис.2 приведен пример эволюции начального сигнала в рамках уравнения (10), записанного в других переменных [2]. Здесь начальный сигнал распадается на два связанных солитона и один солитон с осциллирующим хвостом, причем первый двугорбый солитон является стационарным, а второй по существу представляет собой бризер, т.к. его горбы осциллируют возле некоторого среднего положения. Более подробно поведение горбатых солитонов рассмотрено в [2].

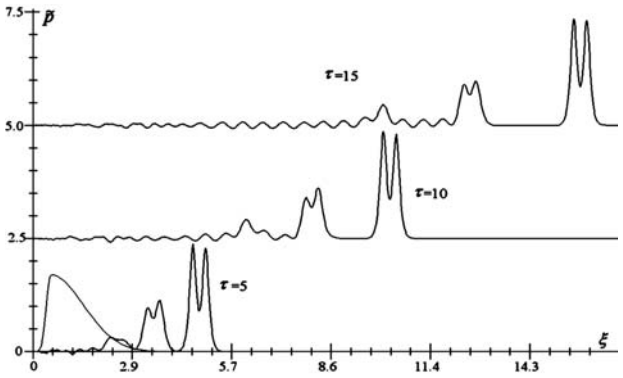


Рис.2 Пример нестационарного численного решения уравнения (10) по распаду начального сигнала на последовательность уединенных волн.

Для выяснения свойств обнаруженных необычных уединенных волн было рассмотрено стационарное решение (10), которое соответствующей заменой переменных было приведено к двух параметрическому нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнении четвертого порядка

$$P^{IV} + aP'' + bP^{2''} - P + P^2 = 0 \quad (11)$$

Решения (11) находились в $k$ пространстве как решения уравнения типа (8) методом итераций с использованием стабилизирующего множителя Петвиашвили [4]. Подробно найденные решения, описаны в [3]. В случае, если спектр солитона по волновым числам лежал полностью на низкочастотной ветви, т.е. $k < k_1$, то решениями были солитоны близкие к солитонам КдВ. При дальнейшем расширении спектра, до величины $k < k_s$, (см. рис.1), то у солитона появлялись не затухающие осциллирующие хвосты, как это показано на рис.3.

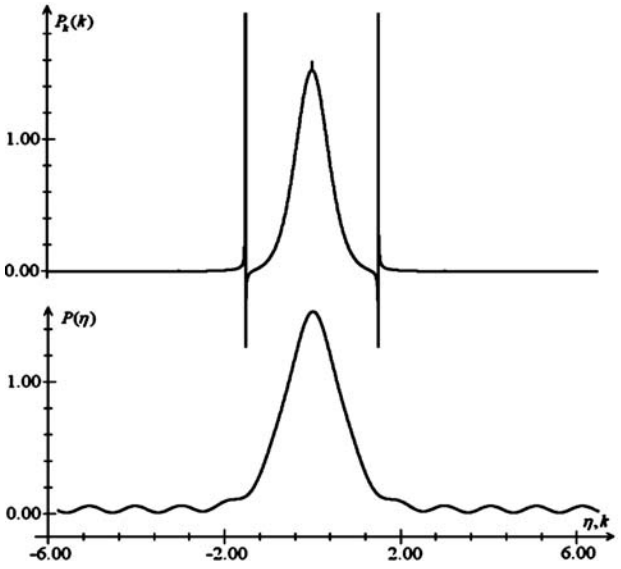


Рис.3 Солитон ПКдВ с осциллирующим хвостом как решение (11) при $a = 1{,}837$, $b = 0{,}549$.

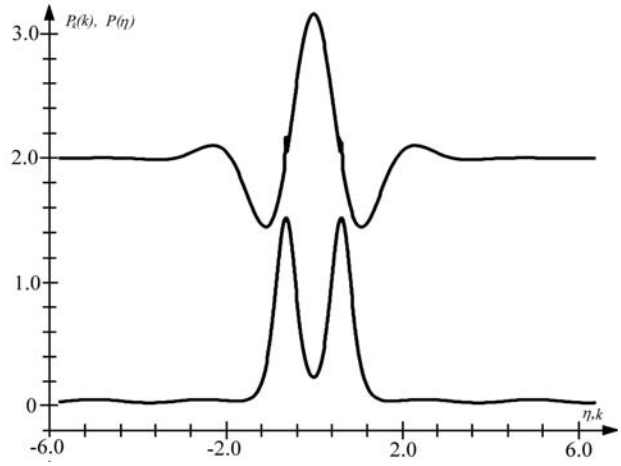


Рис.4 Уединенная волна ПКдВ в виде связанной солитонной пары и ее спектр как решение (11) при $a = -1{,}909$, $b = 2{,}402$.

При дальнейшем расширении спектра до $k > k_s$ решения (11) существуют только, если в спектре $U(k_s) = 0$. Как оказалось, такое возможно, если спектр осциллирующий, а значения скорости солитона $V_s$ представляют собой дискретный ряд, а уединенная волна представляет собой связанную солитонную пару, что проиллюстрировано на рис.4.

К сожалению, численные решения (11) не позволяют найти бифуркационные значения параметров $a$ и $b$, и для аналитического исследования решений ПКдВ необходимы более совершенные методы, например, метод обратной задачи теории рассеяния, который с успехом был предложен для уравнения КдВ [5] и для уравнения НУШ [6].

## МЕТОД ОЗТР ДЛЯ ДВУХРЕЗОНАНСНОГО УРАВНЕНИЯ ПКДВ

Соответствующей заменой переменных уравнение (10) легко приводится к виду, необходимому для его анализа методом ОЗТР [6]

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_{xx} + s(u_t + 6uu_x + u_{xxx}) = hu_x \qquad (12)$$

Найдем пару операторов Лакса для записи (12) в виде коммутатора $L_t = [A, L]$. Нетрудно убедится, что следующие операторы удовлетворяют этому условию

$$L = -\left( D^2 + \frac{18s}{h} u_x D + u_{xx} + su) \right) \qquad (13)$$

$$A = \left( D^3 - \frac{h}{s} u_x + 6uD - \frac{h}{s} D \right) \qquad (14)$$

Дальнейший достаточно громоздкий анализ проведем схематично с приведением некоторых наиболее существенных результатов. Оператор рассеяния (13) оказывается существенно более сложным, чем оператор Штурма-Лиувилля, и формулировка прямой задачи рассеяния $L\varphi = \lambda\varphi$ принимает вид

$$\varphi_{xx} + 2au_x\varphi_x + (u_{xx} + su + \lambda)\varphi = 0 \qquad (15)$$

где $a = 9s/h$. Пусть асимптотика решения (12) для потенциала рассеяния как и в случае КдВ при $x \to \pm\infty$ является быстроспадающей и $u, u_x, u_x \to 0$, тогда. (это не всегда верно, как показывают численные стационарные и нестационарные решения (12)), тогда прямая задача рассеяния (ПЗР) $\varphi_{xx} + \lambda\varphi = 0$ совпадает с ПЗС для КдВ. Обратная задача рассеяния (ОЗР) существенно упрощается, если использовать замену $\varphi = \psi e^{-au}$. В этом случае (15) принимает вид

$$\begin{aligned} &\psi'' + (E + \lambda)\psi = 0, \\ &E = u''(1-a) - a^2 u'^2 + su = 0 \end{aligned} \qquad (16)$$

Решение ОЗР на потенциале $E$ уже известно [5], и представляет собой функцию $E_0 = A/\cosh(x/l)$. Соответствующий безотражательный потенциал $u_0$ находится в соответствии с (16) решением дмфференциального уравнения с со следующими граничными условиями

$$(1-a)u'' - a^1 u'^2 + su = \frac{A}{\cosh(x/l)} \qquad (17)$$

В частном случае $a = 1$ решение (17) принимает форму более простого дифференциального уравнения с начальным условием в виде амплитуды потенциала $B$

$$u' = \pm\sqrt{su - \frac{A}{\cosh^2(x/l)}}, u(0) = B \qquad (18)$$

Отметим, что уравнение для безотражательного потенциала (17) имеет три параметра: биффуркационное значение коэффициента $a = 1$, амплитуду и ширину солитона КдВ: $A$ и $l$. Отметим, что некоторые из начальных потенциалов как решений ОЗР (17) будут и стационарными решениями (12). Два из таких примера приведены на рис.5 для солитона ПКдВ с не осциллирующим хвостом и на рис.6 для солитона ПКдВ с осциллирующим хвостом .

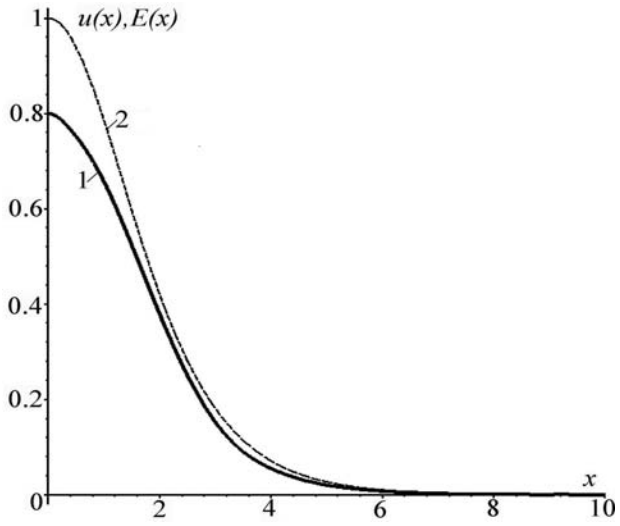


Рис.5 Безотражательный потенциал (17) как стационарное решение ПКдВ в виде обычного солитона при $a = 0{,}948$, $s = 1.285$, $L = 1$, $A = 1$.

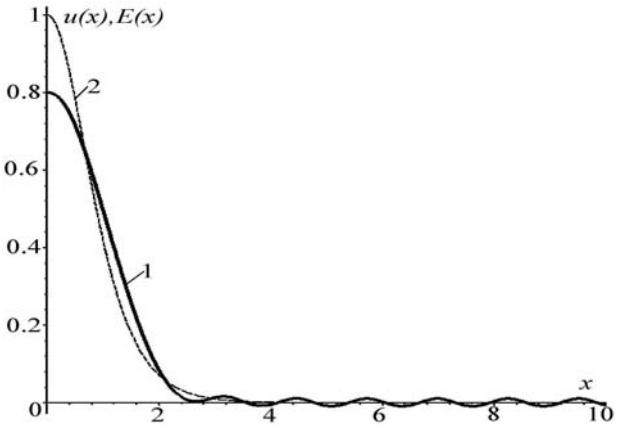


Рис.6 Безотражательный потенциал (17) как стационарное решение ПКдВ в виде солитона с осциллирующим хвостом при $a = 0{,}948$, $s = 1.285$, $L = 2$, $A = 1$.

Проделанный анализ позволяет найти как минимум одно из биффуркационых значений − значение параметра $a = 1$, при котором проходит граница осциллирующих и не осциллирующих потенциалов рассеяния. В частности, связанные солитоны как решения (17) возможны только при $a > 1$. Отметим, что полное решение ОЗТР при незатухающих на бесконечности потенциалах по методу [6] невозможно.

## ВЫВОДЫ

Полученое нелинейное волновое уравнение высокого порядка для полидисперсной газожидкостной смеси с несколькими размерами пузырьков ПКдВ двухрезонансной нелинейной среды Лоренца является обобщением двух широко известных и изученных уравнений уравнения КдВ и уравнения НУШ. Его найденные решения оказываются намного более разнообразнее и сложнее, чем решения КдВ и НУШ. В частности ПКдВ допускет существование волновых структур, которые могут распространяться в окне непрозрачности. Найденная формулировка ОЗТР для ПКдВ в виде пары Лакса и уравнения ОЗР для безотражательных потенциалов позволяют существенно продвинуться в изучении решений ПКдВ и, возможно, выявить его полную интегрируемость.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред, − М.: Энергоатомиздат, 1990. 248 с.

   Nakoryakov, V.E. and Pokusaev, B.G. and Shreyber, I.R. (1990). Volnovaya dinamika gaso I parozhidkostnykh sred [Wave dynamics of gas-liquid mixtures], Energoatomizdat, Moskow, USSR.

2. Gasenko V.G., , Dontsov V.E., Nakoryakov B.E. (2002). On the structure of complicated shape solitary waves in a liquid with gas bubbles due to two different bubbles' sizes // Proceedings of 2-nd Biot conference on Poromechanics, Grenoble-France, August 26-28, 2002, pp.715-721.

3. V.G. Gasenko and V.E. Nakoryakov. J. Eng. Thermophysics 17, 158 (2007).

4. Петвиашвили В.И. Об уравнении необыкновенного солитона // Физика плазмы. ¾ 1976. Т.2. №3. С.469-472.

   Petviashvili, V.I. (1976). "About unusual soliton equation", Fizika plazmy, Vol.2, no.3, pp.469-472.

5. Miura R.M., Gardner C.S., Kruskal M.D. Korteweg–de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion // J. Math. Phys. 1968. Vol. 9, № 8. P. 1204–1209.

6. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1971. Т. 61, № 1. С. 118–134.

   Zakharov, V.E. and Shabat, A.B. (1971). "Exact theory of two dimentional self focusing and one dimentional waves automodulation", ZhETF, Vol.61. no.1, pp.118-134.

© Гасенко В.Г.