УДК 532.7+532.516.5+532.593

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ МЕТОДОМ LBE С УЧЕТОМ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

Куперштох А.Л.[1,2], Медведев Д.А.[1,2], Грибанов И.И.[1]

[1]*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2]*Национальный исследовательский Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00526), Сибирского отделения РАН (проекты № 38 и № 79), и Минобрнауки России.

АННОТАЦИЯ

Предложен новый способ учета переноса тепла для моделирования течений в среде с фазовыми переходами жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана (Lattice Boltzmann Equation, LBE). При наличии границ раздела фаз необходимо рассматривать уравнение переноса энергии. Для этого вводится второй комплект функций распределения LBE в форме пассивного скаляра, описывающего перенос внутренней энергии. Для устранения паразитной диффузии энергии на границах раздела фаз с большим скачком плотности введены специальные “псевдосилы”, удерживающие пассивный скаляр от разлета. В уравнении энергии учитываются теплопроводность и работа сил давления. Для того, чтобы метод LBE остался методом сквозного счета границ раздела фаз, выделение и поглощение скрытой теплоты фазового перехода учитывается в уравнении энергии во внутренней области тонкого переходного слоя от жидкости к пару. Проведен ряд простых тестов, демонстрирующих все аспекты рассматриваемых процессов. Показано выполнение галилеевской инвариантности и подобия процессов теплопроводности. Метод имеет малую схемную диффузию внутренней энергии и может быть применен для моделирования широкого класса течений двухфазных сред с тепломассопереносом.

ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование течений с фазовыми переходами жидкость–пар представляет заметные трудности из-за того, что в процессе расчетов в объеме вещества могут возникать новые межфазные границы, а существующие границы могут исчезать или изменять свою топологию. Поэтому методы, использующие выделение границ, применять очень трудно, если вообще возможно. Кроме того, отношение плотностей жидкой и газообразной фаз обычно велико (может достигать нескольких десятков и сотен тысяч), что приводит к заметной численной диффузии и/или дисперсии на границах при использовании обычных конечно-разностных методов.

Метод решеточных уравнений Больцмана (LBE) основан на решении кинетического уравнения для ансамбля псевдочастиц. Метод LBE широко используется для моделирования течений однофазных и двухфазных сред [1-7].

Для описания теплопереноса в методе LBE было предложено три принципиально различных метода. В работах [8-10] это было сделано с помощью расширения набора возможных векторов скорости $\mathbf{c}_k$. Недостатками многоскоростного подхода являются достаточно узкий диапазон моделируемых температур, а также значительное увеличение количества используемых массивов данных.

В работе [11] уравнение энергии решалось с помощью метода конечных разностей с использованием плотности и скорости вещества, полученных из метода LBE (гибридный метод). Однако при моделировании теплопереноса в эйлеровых координатах этим методом в случае движущейся среды наблюдается высокая схемная диффузия и дисперсия внутренней энергии на границах раздела фаз, что сильно ограничивает возможности моделирования.

В третьем способе моделирования конвективного переноса энергии для реализации пассивного скаляра (ПС) в методе LBE используется второй комплект функций распределения LBE [12-13]. При этом схемная диффузия гораздо меньше, чем в конечно-разностных методах. Однако ранее этот метод был реализован только для течений жидкости почти постоянной плотности и, соответственно, теплоемкости, когда в качестве ПС можно использовать температуру. Для течений с фазовыми переходами плотность вещества сильно меняется, и необходимо рассматривать перенос не температуры, а энергии. Второй комплект функций распределения для энергии использовался в работах [13-15], но только для однофазных течений.

МЕТОД РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

Метод решеточных уравнений Больцмана основан на решении кинетического уравнения для ансамбля псевдочастиц. Используется небольшой набор скоростей псевдочастиц $\mathbf{c}_k$ – такой, что векторы $\mathbf{e}_k = \mathbf{c}_k \Delta t$ соответствуют расстояниям до соседних узлов пространственной решетки, где Δt – шаг по времени. Для одномерной модели D1Q3 с тремя векторами скорости $|\mathbf{c}_k| = 0$, $h/\Delta t$. Для двумерной модели D2Q9 с девятью векторами скорости и для трехмерной модели D3Q19 с 19 векторами скорости $|\mathbf{c}_k| = 0$, $h/\Delta t$, $\sqrt{2}h/\Delta t$.

В качестве основных переменных в методе LBE используются одночастичные функции распределения N_k, имеющие смысл плотности, уравнения эволюции для которых имеют вид

$$N_k(\mathbf{x}+\mathbf{c}_k\Delta t, t+\Delta t) = N_k(\mathbf{x},t) + \Omega_k(N) + \Delta N_k, \qquad (1)$$

где $k = 1,\ldots,b$. Здесь Ω_k – оператор столкновений, а ΔN_k – изменение функций распределения из-за действия объемных сил (внешних и внутренних).

Оператор столкновений выбирается в виде релаксации к локально равновесному состоянию

$$\Omega_k = \frac{N_k^{eq}(\rho,\mathbf{u}) - N_k(\mathbf{x},t)}{\tau},$$

где $\tau = t_{rel}/\Delta t$ – безразмерное время релаксации.

Равновесные функции распределения $N_k^{eq}(\rho,\mathbf{u})$ определяются формулой

$$N_k^{eq}(\rho,\mathbf{u}) = \rho w_k \left(1 + \frac{\mathbf{c}_k\mathbf{u}}{\theta} + \frac{(\mathbf{c}_k\mathbf{u})^2}{2\theta^2} - \frac{\mathbf{u}^2}{2\theta}\right). \qquad (2)$$

Здесь коэффициенты w_k зависят от конкретной решетки. Кинетическая температура псевдочастиц для перечисленных выше LBE моделей равна $\theta = (h/\Delta t)^2/3$, а кинематическая вязкость $\nu = \theta(\tau - 1/2)\Delta t$ определяется временем релаксации τ.

Плотность вещества ρ и скорость $\mathbf{u}$ (гидродинамические переменные) вычисляются как

$$\rho = \sum_{k=0}^{b} N_k, \qquad \rho\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{b} \mathbf{c}_k N_k. \qquad (3)$$

Изменение функций распределения в узле из-за действия объемных сил вычисляется по методу точной разности (Exact Difference Method, EDM) [16-17]

$$\Delta N_k(\mathbf{x},t) = N_k^{eq}(\rho,\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}) - N_k^{eq}(\rho,\mathbf{u}), \qquad (4)$$

где $\Delta\mathbf{u} = \mathbf{F}\Delta t/\rho$ – изменение скорости вещества за шаг по времени, а $\mathbf{F}$ – полная сила, действующая на вещество в узле.

В случае действия объемных сил для вычисления физической скорости $\mathbf{u}^*$ следует использовать выражение

$$\rho\mathbf{u}^* = \sum_{k=1}^{b} \mathbf{c}_k N_k + \mathbf{F}\Delta t/2. \qquad (5)$$

Обоснованием метода решеточных уравнений Больцмана принято считать тот факт, что при разложении уравнений эволюции (1) по методу Чепмена – Энскога [1] во втором порядке по малому числу Кнудсена получаются уравнения неразрывности и Навье – Стокса.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Чтобы во флюиде возникли фазовые переходы, необходимо в методе LBE смоделировать притягивающую ветвь потенциала «межмолекулярного» взаимодействия. Для этого в работе [3] были введены силы притяжения, действующие на вещество в узле со стороны соседних узлов. Позже было предложено записать полную силу $\mathbf{F}$, действующую на вещество в узле, как градиент псевдопотенциала U, определяемого через уравнение состояния вещества [4,11]

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\nabla(p(\rho,T) - \rho\theta)\,. \qquad (6)$$

В результате в методе LBE вместо контактной границы моделируется тонкий переходной слой жидкость–пар, в котором плотность изменяется плавно на размерах нескольких узлов решетки (метод сквозного счета границ раздела фаз). При этом на границах раздела появляется поверхностное натяжение, которое уменьшается при повышении температуры и обращается в ноль в критической точке.

В работе [18] было предложено ввести функцию $\Phi = \sqrt{-U}$. Тогда выражение для силы (6) можно переписать в эквивалентном виде

$$\mathbf{F}_N = 2A\nabla(\Phi^2) + (1-2A)2\Phi\nabla\Phi\,, \qquad (7)$$

где A – свободный параметр, позволяющий добиться точного описания плотностей фаз на кривой фазового равновесия [18]. Конечно-разностная формула для уравнения (7), обеспечивающая достаточную изотропность, имеет вид [5,18,19]

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha h}\left[A\sum_{k=1}^{b} G_k \Phi^2(\mathbf{x}+\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k + \right.$$
$$\left. + (1-2A)\Phi(\mathbf{x})\sum_{k=1}^{b} G_k \Phi(\mathbf{x}+\mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k\right]. \qquad (8)$$

Здесь $G_k > 0$ – коэффициенты, различные для основных и диагональных направлений решетки.

В данной работе использовалось уравнение состояния Ван-дер-Ваальса

$$\tilde{p} = \frac{8\tilde{\rho}\tilde{T}}{3-\tilde{\rho}} - 3\tilde{\rho}^2\,. \qquad (9)$$

Здесь и далее будут использованы приведенные переменные $\tilde{p} = p/p_{\text{кр}}$, $\tilde{\rho} = \rho/\rho_{\text{кр}}$ и $\tilde{T} = T/T_{\text{кр}}$, где $p_{\text{кр}}$, $\rho_{\text{кр}}$ и $T_{\text{кр}}$ – значения давления, плотности и температуры в критической точке. Использование более сложных уравнений состояния, в том числе и для реальных веществ, рассмотрено в [19,20].

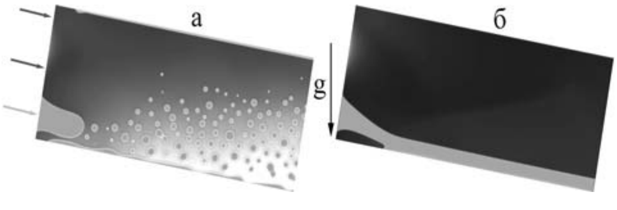

Рис.1 Течение пленки жидкости по наклонной поверхности ($\alpha = 10°$) в поле тяжести. Сетка 1024×512.

В качестве примера приведем моделирование задачи об изотермическом течении тонкой пленки в наклонном канале в поле тяжести (рис. 1б). Сверху и снизу – непроницаемые стенки с условиями прилипания. Слева поступают жидкость и пар, а справа – вытекают. Первоначально находящийся в канале пар конденсируется в капли, которые опускаются в поле тяжести и сносятся потоком вниз по течению (рис. 1а).

ТЕПЛОПЕРЕНОС

Уравнение для плотности внутренней энергии $E = \rho c_V T$ с учетом работы сил давления и теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}(E\mathbf{u}) = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \nabla(\lambda\nabla T)\,, \qquad (10)$$

где $\lambda = \rho c_V \chi$ – коэффициент теплопроводности. Тепловыделением из-за вязкого трения обычно можно пренебречь.

Наиболее сложным является расчет левой части уравнения (10), т.е. конвективного переноса внутренней энергии вместе с потоком вещества, скорость которого $\mathbf{u}^*$ вычисляется по формуле (5).

В данной работе для моделирования конвективного переноса энергии предложено использовать дополнительный комплект функций распределения LBE (метод пассивного скаляра, ПС). Этот метод имеет гораздо меньшую схемную диффузию по сравнению с конечно-разностными методами. Однако ранее он был реализован только для течений жидкости почти постоянной плотности и, соответственно, теплоемкости, когда в качестве ПС можно использовать температуру T .

Для течений с фазовыми переходами плотность вещества сильно меняется, и необходимо использовать уравнение (10) для плотности внутренней энергии.

При этом $E = \sum_{k=0}^{b} g_k$, а уравнения для эволюции функций распределения $g_k(\mathbf{x},t)$ можно записать в виде, аналогичном уравнению (1)

$$g_k(\mathbf{x}+\mathbf{c}_k\Delta t, t+\Delta t) = g_k(\mathbf{x},t) + \frac{g_k^{eq}(E,\mathbf{u}) - g_k(\mathbf{x},t)}{\tau_E} + \Delta g_k(\mathbf{x},t).$$

Здесь Δg_k – изменение функций распределения за шаг по времени, а τ_E – безразмерное время релаксации для функций распределения энергии. Равновесные функции распределения $g_k^{eq}(E,\mathbf{u})$ имеют вид, аналогичный уравнению (2).

Основная проблема заключается в том, что на границах раздела фаз есть скачок теплоемкости. Из-за этого даже при равномерном распределении давления и температуры начинается паразитная диффузия (разлет) энергии из плотной фазы в менее плотную. Этот эффект хорошо наблюдается для стационарной капли в случае баротропного уравнения состояния $p = p(\rho)$ (давление зависит только от плотности). При этом нет обратной связи по температуре, и не возникают волны давления и плотности. В качестве такого уравнения состояния использовалось уравнение типа Ван-дер-Ваальса с константой $\widetilde{T}_0$ вместо температуры среды.

На рис. 2 показан разлет энергии E_* на границах раздела фаз для одномерной покоящейся капли жидкости, находящейся в равновесии с насыщенным паром. При этом начальное равномерное распределение температуры $\widetilde{T} = \text{const}$ нарушается (рис. 2*б*). Для наглядности в этом тесте работа сил давления и теплопроводность выключены.

В данной работе впервые удалось разработать метод ПС для описания переноса энергии в условиях фазовых переходов. Для этого вводятся специальные "псевдосилы" для скаляра энергии, удерживающие энергию от разлета на границах фаз.

Реализован вариант метода для случая, когда удельная теплоемкость флюида c_V постоянна, и плотность внутренней энергии при заданной температуре пропорциональна плотности флюида [21]. Для учета действия "псевдосил" в уравнениях эволюции функций распределения $g_k(\mathbf{x},t)$, описывающих энергию, тоже используется метод точной разности (EDM), аналогичный уравнению (4)

$$\Delta g_k^{(1)}(\mathbf{x},t) = g_k^{eq}(E,\mathbf{u}+\Delta\mathbf{u}) - g_k^{eq}(E,\mathbf{u}), \quad (11)$$

где $\mathbf{u}$ – скорость вещества, определяемая по основным функциям распределения LBE N_k (3).

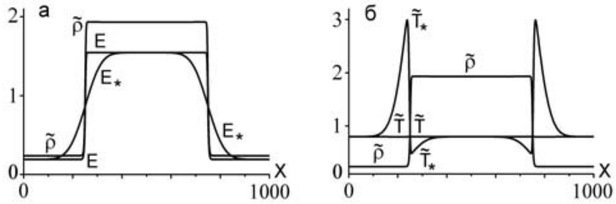

Рис.2 Паразитная диффузия (разлет) энергии на границах раздела фаз для одномерной стационарной капли в насыщенном паре.

Слагаемые в правой части уравнения (10) можно учесть с помощью конечных разностей. Работу сил давления удобнее переписать в виде

$$\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = -p\,\mathrm{div}(\mathbf{u}^*).$$

Например, в одномерном случае для изменения энергии за счет работы сил давления и теплопроводности имеем

$$\frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\Delta t} = -p_i^n \frac{(u^*)_{i+1}^n - (u^*)_{i-1}^n}{2h} + \frac{(\lambda_{i+1}^n + \lambda_i^n)T_{i+1}^n - (\lambda_{i+1}^n + 2\lambda_i^n + \lambda_{i-1}^n)T_i^n + (\lambda_i^n + \lambda_{i-1}^n)T_{i-1}^n}{2h^2}. \quad (12)$$

При этом соответствующие изменения функций распределения $\Delta g_k^{(2)}$ в методе LBE вычисляются пропорционально изменению внутренней энергии в узлах решетки

$$\Delta g_k^{(2)}(\mathbf{x},t) = g_k(\mathbf{x},t)\Delta E_i / E_i^n. \quad (13)$$

Таким образом, полное изменение функций распределения вычисляется как $\Delta g_k = \Delta g_k^{(1)} + \Delta g_k^{(2)}$.

Начальное состояние газа для тестов по диффузии и галилеевской инвариантности выбрано в виде прямоугольника (шириной $400\,h$) с параметрами $\widetilde{T}_{\max} = 0.947$, $\widetilde{\rho}_1 = 0.03$ на фоне $\widetilde{T}_0 = 0.6$, $\widetilde{\rho}_0 = 0.05$ так, что давление $p = \text{const}$. Распределения температуры и плотности в покоящемся газе (рис. 3а,б) и в движущемся со скоростью $u = 0.1h/\Delta t$ (рис. 3в,г) полностью совпадают, то есть выполнена галилеевская инвариантность. При $\tau_E = 0.503$ коэффициент схемной диффузии энергии равен $D_E = \theta(\tau_E - 1/2)\Delta t = 0.001h^2/\Delta t$.

Показано, что в покоящемся газе для распределений температуры и плотности при разных коэффициентах температуропроводности χ в соответствующие моменты времени выполняется условие подобия $l \sim \sqrt{\chi t}$. Поскольку разностная схема (11) является явной, то устойчивость в одномерном случае сохраняется для значений $\chi\Delta t / h^2 < 0.5$.

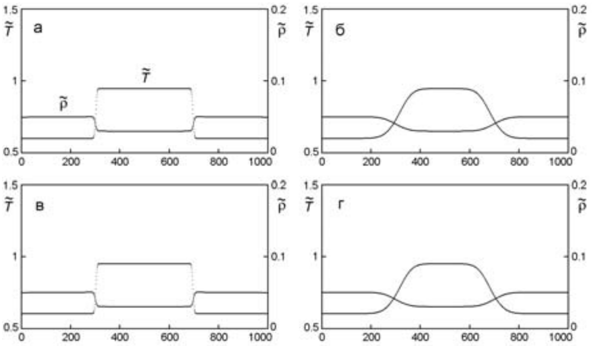

Рис.3 Схемная диффузия энергии. Скорость течения газа $u = 0$ (а, б), 0.1 (в, г) в единицах $h/\Delta t$. $t =$ 10000 (а, в), 1000000 (б, г).

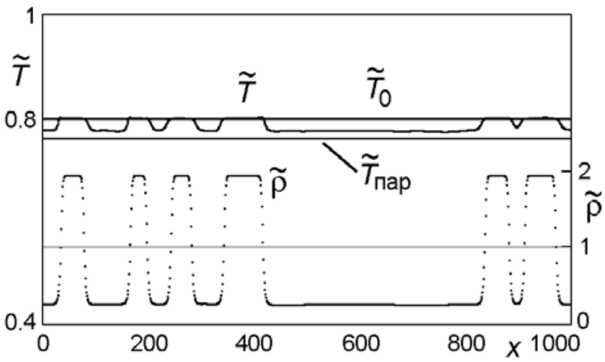

Рис.4 Распределение температуры $\widetilde{T}$ и плотности флюида $\widetilde{\rho}$ после спинодального распада на жидкость и пар с учетом работы сил давления. $\widetilde{T}_0 = 0.8$, $\widetilde{\rho}_0 = 0.7$. $t = 50000$.

В качестве теста для работы сил давления рассматривалась задача о спинодальной декомпозиции (распад первоначально однородного флюида, состояние которого находится под спинодалью) на двухфазную систему жидкость–пар.

На рис. 4 показаны результаты расчетов. При этом теплопроводность λ полагалась равной нулю, и оставалась только небольшая схемная диффузия энергии.

Поскольку теплоемкость жидкой фазы значительно больше, чем у пара, а относительное изменение объема меньше, то температура жидкости повышается из-за работы сил давления незначительно. Температура же газовой фазы заметно уменьшается. Можно привести оценку температуры пара

$$T_{\text{пар}} = T_0 - \frac{p}{c_V}\left(\frac{1}{\rho_{\text{пар}}} - \frac{1}{\rho_0}\right).$$

Видно, что результаты моделирования дают близкие значения температуры пара (рис. 4).

СКРЫТАЯ ТЕПЛОТА ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Скрытая теплота фазового перехода должна учитываться в условиях на движущейся границе раздела фаз

$$\lambda_{\text{ж}} \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\xi-0} - \lambda_{\text{пар}} \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=\xi+0} = \rho_{\text{ж}}(T) Q(T) \frac{d\xi}{dt}.$$

Здесь ξ – координата плоской границы раздела фаз жидкость–пар, $\rho_{\text{ж}}(T)$ – плотность жидкости на кривой сосуществования фаз (рис. 5). Теплота фазового перехода $Q(T)$ уменьшается с ростом температуры и обращается в ноль при $T = T_{\text{кр}}$.

Сложность заключается в том, что во многих задачах границы возникают, исчезают, изменяется их топология. Достоинство метода LBE заключается в том, что он является методом сквозного счета границ раздела фаз жидкость–пар. При этом границы раздела фаз представляют собой некоторые переходные слои, в которых плотность плавно изменяется от плотности жидкости до плотности пара в соответствии с кривой сосуществования фаз (рис. 5). Плотность порции вещества при фазовом переходе изменяется во времени тоже постепенно.

Если не пытаться точно описать внутреннюю структуру переходного слоя, а учесть скрытую теплоту фазового перехода только интегрально по ширине переходного слоя, то можно считать, что скрытая теплота тоже постепенно выделяется или поглощается внутри переходного слоя на некотором участке изменения плотности $\rho_1 > \rho > \rho_2$ (рис. 5) согласно уравнению

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\rho_ж(T)Q(T)}{\rho_2 - \rho_1}\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho_ж(T)Q(T)}{\rho_2 - \rho_1}\rho\,\mathrm{div}(\mathbf{u}^*).$$

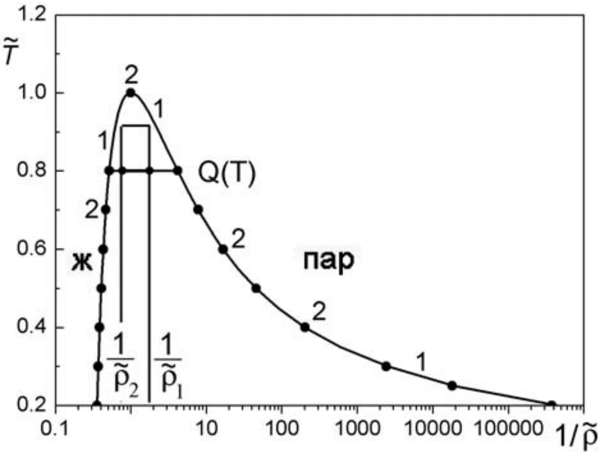

Рис.5 Схема учета теплоты фазового перехода. Теоретическая кривая сосуществования фаз для УС Ван-дер-Ваальса – кривая 1. Расчеты методом LBE – точки 2.

В качестве значений ρ_1 и ρ_2 при каждой температуре могут использоваться значения плотности пара $\rho_п$ и жидкости $\rho_ж$, соответственно. При этом изменение внутренней энергии за шаг по времени из-за теплоты фазового перехода ΔE_Q тоже включается в формулу (13).

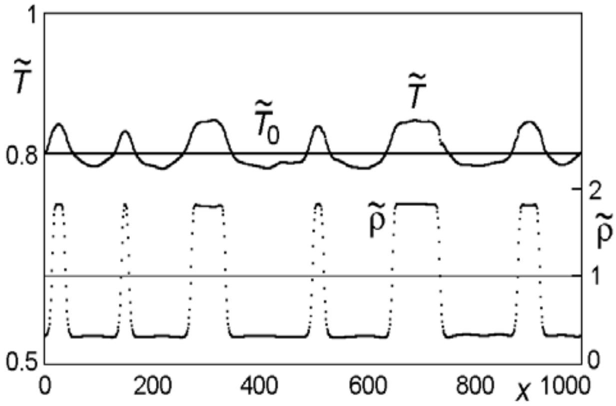

Рис.6 Распределения температуры и плотности флюида после спинодального распада с учетом теплоты фазового перехода. $\tilde{T}_0 = 0.8$, $\tilde{\rho}_0 = 0.7$. $t = 50000$.

На рис. 6 показаны результаты моделирования с учетом теплоты фазового перехода. При этом температура жидкой фазы заметно превышает начальную, так как при конденсации пара выделяется скрытая теплота фазового перехода.

РАСЧЕТЫ ПО ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ

Проведено моделирование двумерного течения, включающего круглую каплю, находящуюся в равновесии с насыщенным паром. Скорость течения направлена по диагонали расчетной области (рис. 7). Использовались периодические граничные условия по x и по y. За время $t = 62000$ капля вместе с течением совершила более шести оборотов по диагонали, что соответствует 27 диаметрам капли. Наблюдается изотропность результатов расчетов, т.е. круглая форма капли. Паразитная диффузия внутренней энергии практически отсутствует. Неравномерность температуры в расчетах $\Delta\tilde{T} \approx 0.001$.

На рис. 8 показаны результаты двумерного моделирования спинодальной декомпозиции флюида с начальной температурой $\tilde{T}_0 = 0.8$ с учетом работы сил давления и теплоты фазового перехода. Температура пара опускается до $\tilde{T}_0 \approx 0{,}77$, что меньше начальной из-за расширения, а температура жидкости достигает $\tilde{T}_0 \approx 0{,}83$, что выше начальной из-за выделения теплоты фазового перехода.

При дальнейшей эволюции системы происходит коалесценция капель в одну или несколько, как за счет их слияния, так и за счет испарения маленьких капель. Температура с течением времени выравнивается за счет теплопроводности. На рис. 9 показаны последние две капли. Температура меньшей капли ниже за счет эффекта испарения, а большая капля нагревается из-за конденсации. Разница температур может доходить до $\Delta\tilde{T} \approx 0.01$. Когда процесс закачивается (остается одна капля), неравномерность температуры уменьшается до $\Delta\tilde{T} < 0.001$.

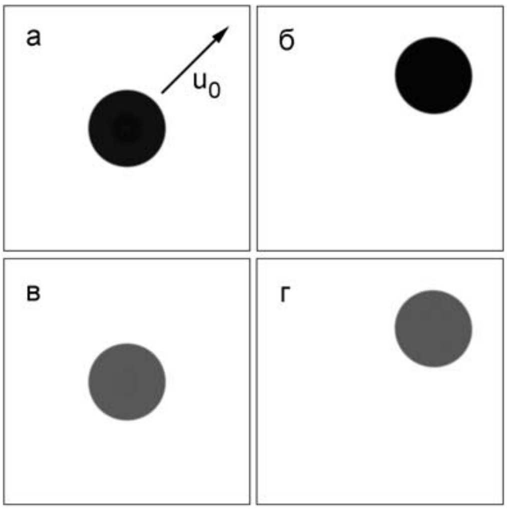

Рис.7 Капля жидкости радиусом $R = 160h$ в насыщенном паре. Распределение плотности (а, б) и распределение внутренней энергии (в, г). $u_{0x} = u_{0y} = 0.1h / \Delta t$. $t =$ 0 (а, в), 62000 (б, г). Сетка 1000×1000.

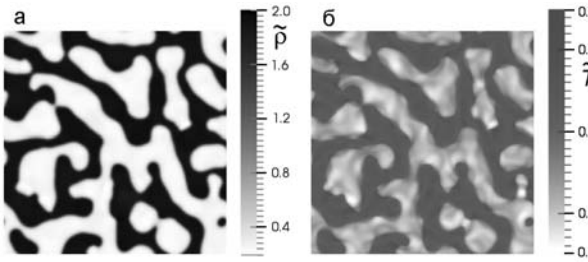

Рис.8 Спинодальная декомпозиция. Распределение плотности (а) и распределение температуры (б). $t =$ 2630. $\tilde{T}_0 = 0.8$. $\tilde{\rho}_0 = 1$. Сетка 500×500.

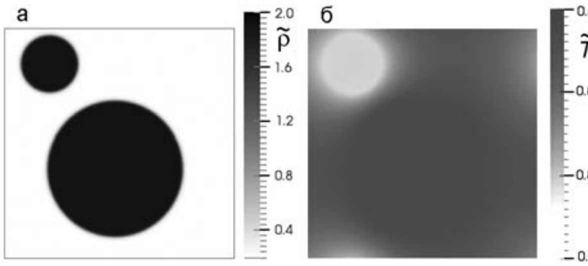

Рис.9 Распределение плотности (а) и температуры (б) на поздней стадии спинодальной декомпозиции. $\tilde{T}_0 = 0.8$. $\tilde{\rho}_0 = 0.8$. $t =$ 1750000. Сетка 500×500.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Впервые удалось разработать метод дополнительного компонента LBE для уравнения переноса энергии в случае течений с фазовыми переходами. В алгоритме учитываются теплопроводность, работа сил давления и скрытая теплота фазового перехода. Реализованный алгоритм является методом сквозного счета границ раздела фаз жидкость–пар, т.е. не требует выделения границ раздела фаз и постановки на них граничных условий. Выполнены простые тесты, показывающие галилеевскую инвариантность, малую схемную диффузию энергии, изотропность и устойчивость метода. Таким образом, разработанный метод LBE с учетом тепломассопереноса применим для моделирования широкого круга течений с фазовыми переходами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chen, S. and Doolen, G.D. (1998). “Lattice Boltzmann method for fluid flow”, Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 30, pp. 329–364.
2. Aidun, C.K. and Clausen, J.R. (2010). “Lattice-Boltzmann Method for Complex Flows”, Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 42, pp. 439–472.
3. Shan, X. and Chen, H. (1993). “Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components”, Phys. Rev. E, Vol. 47, No. 3, pp. 1815–1819.
4. Qian, Y.H. and Chen, S. (1997). “Finite size effect in lattice-BGK models”, International

Journal of Modern Physics C, Vol. 8, No. 4, pp. 763–771.

5. Куперштох А.Л. Трехмерное моделирование двухфазных систем типа жидкость–пар методом решеточных уравнений Больцмана на GPU // Вычислительные методы и программирование. – 2012. – Т. 13. – С. 130–138.

   Kupershtokh, A.L. (2012). “Three-dimensional simulations of two-phase liquid-vapor systems on GPU using the lattice Boltzmann method”, Numerical Methods and Programming, Vol. 13, pp. 130–138.

6. Куперштох А.Л. Трехмерное моделирование методом LBE на гибридных GPU-кластерах распада бинарной смеси жидкого диэлектрика с растворенным газом на систему парогазовых каналов // Вычислительные методы и программирование. 2012. 13. 384–390.

   Kupershtokh, A.L. (2012). “Three-dimensional LBE simulations on hybrid GPU-clusters of the decay of a binary mixture of liquid dielectrics with a solute gas to a system of gas-vapor channels”, Numerical Methods and Programming, Vol. 13, pp. 384–390.

7. Kupershtokh, A.L. (2014). “Three-dimensional LBE simulations of a decay of liquid dielectrics with a solute gas into the system of gas-vapor channels under the action of strong electric fields”, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 67, No. 2, pp. 340–349.

8. Alexander, F.J., Chen, S. and Sterling, J.D. (1993). “Lattice Boltzmann thermohydrodynamics”, Phys. Rev. E, Vol. 47, No. 4, pp. R2249–R2252.

9. Qian, Y.H. (1993). “Simulating thermohydrodynamics with lattice BGK models”, Journal of Scientific Computing, Vol. 8, No. 3, pp. 231–242.

10. Chen, Y., Ohashi, H. and Akiyama, M. (1994). “Thermal lattice Bhatnagar-Gross-Krook model without nonlinear deviations in macrodynamical equations”, Phys. Rev. E, Vol. 50, No. 4, pp. 2776–2783.

11. Zhang R. and Chen H. (2003). “Lattice Boltzmann method for simulations of liquid-vapor thermal flows”, Phys. Rev. E, Vol. 67, No. 6, pp. 066711.

12. Shan X. (1997). “Simulation of Rayleigh–Bénard convection using a lattice Boltzmann method”, Phys. Rev. E, Vol. 55, No. 3, pp. 2780–2788.

13. He X., Chen S. and Doolen G.D. (1998). “A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit”, Journal of Computational Physics, Vol. 146, No. 2, pp. 282–300.

14. Guo, Z., Zheng, C., Shi, B. and Zhao, T.S. (2007). “Thermal lattice Boltzmann equation for low Mach number flows: Decoupling model”, Phys. Rev. E, Vol. 75, No. 3, pp. 036704.

15. Li, Q., He, Y.L., Wang, Y. and Tao, W.Q. (2007). “Coupled double-distribution-function lattice Boltzmann method for the compressible Navier – Stokes equations”, Phys. Rev. E, Vol. 76, No. 5, pp. 056705.

16. Куперштох А.Л. Учет действия объемных сил в решеточных уравнениях Больцмана // Вестник НГУ: Серия “Математика, механика и информатика”. – 2004. – Т. 4, № 2. – С. 75–96.

   Kupershtokh, A.L. (2004). “Incorporating a body force term into the lattice Boltzmann equation”, Vestnik NGU (Quart. J. of Novosibirsk State Univ.), Series: Math., Mech. and Informatics, Vol. 4, No. 2, pp. 75–96.

17. Kupershtokh, A.L. (2010). “Criterion of numerical instability of liquid state in LBE simulations”, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 59, No. 7, pp. 2236–2245.

18. Куперштох А.Л. Моделирование течений с границами раздела фаз жидкость-пар методом решеточных уравнений Больцмана // Вестник НГУ: Серия “Математика, механика и информатика”. – 2005. – Т. 5, № 3. – С. 29–42.

   Kupershtokh, A.L. (2005). “Simulation of flows with liquid-vapor interfaces by the lattice Boltzmann method”, Vestnik NGU (Quart. J. of Novosibirsk State Univ.), Series: Math., Mech. and Informatics, Vol. 5, No. 3, pp. 29–42.

19. Kupershtokh, A.L., Medvedev, D.A. and Karpov, D.I. (2009). “On equations of state in a lattice Boltzmann method”, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 58, No. 5, pp. 965–974.

20. Kupershtokh, A.L. (2011). “A lattice Boltzmann equation method for real fluids with the equation of state known in tabular form only in regions of liquid and vapor phases”, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 61, No. 12, pp. 3537–3548.

21. Куперштох А.Л., Медведев Д.А., Грибанов И.И. Моделирование тепломассопереноса в среде с фазовыми переходами методом решеточных уравнений Больцмана // Вычислительные методы и программирование. – 2014. – Т. 15. – С. 317–328.

Kupershtokh, A.L., Medvedev, D.A. and Gribanov, I.I. (2014). “Modeling of thermal flows in a medium with phase transitions using the lattice Boltzmann method”, Numerical Methods and Programming, Vol. 15, pp. 317–328.