УДК 536. 24.01

ТРЕХМЕРНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛЕНКЕ ЖИДКОСТИ

Актершев С. П., Алексеенко С.В.

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 12-01-00360-а).

АННОТАЦИЯ

Интерес к пленочным течениям жидкости обусловлен как прикладной, так и научной значимостью этого класса течений. Важной характеристикой таких течений является их волновая структура, влияющая как на процессы переноса, так и на режимные особенности течения. Теоретический подход к исследованию волн в пленках жидкости, предложенный в работе Капицы [3], был использован Шкадовым в работе [4], в которой выведены модельные уравнения для длинноволновых двумерных возмущений в стекающей пленке. Интегральная модель [4] (в зарубежной литературе ее называют IBL моделью) основана на погранслойном приближении и на автомодельном (параболическом) профиле скорости.

Проблемы интенсификации процессов тепло-массопереноса потребовали дальнейшего усовершенствования и обобщения развитого в [3, 4] подхода. Общим фактором, сдерживающим развитие теоретических моделей, является не только сложность проблемы, но также слабая изученность трехмерных волновых режимов течения пленки. В настоящее время имеется сравнительно немного экспериментальных и теоретических работ, посвященных трехмерным волнам в тонких пленках жидкости.

Для описания длинноволновых двумерных возмущений в стекающей пленке жидкости в [1, 2] разработана новая модель, основанная на интегральном подходе и на разложении скорости в ряд по системе линейно независимых базисных функций (гармоник). В данной работе эта модель обобщена для случая трехмерных волн, а также для случая, когда на поверхности пленки действует касательное напряжение. Предлагаемая модель является, в некотором роде, обобщением модели [4], но, в отличие от нее, обладает большей «степенью свободы» для профиля скорости. Для случая свободно стекающей пленки проведен линейный анализ устойчивости пленочного течения относительно двумерных и трехмерных возмущений, а также численное моделирование нелинейных волн. Результаты расчетов для двумерных волн хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными. В качестве примера трехмерных волн проведен расчет эволюции локализованного трехмерного возмущения типа солитона в вертикальной пленке воды.

ВВЕДЕНИЕ

С чисто научной стороны, волны на поверхности жидких пленок представляют собой классическую систему, в которой наблюдаются дисперсия, накачка и диссипация энергии, что делает этот вид течений привлекательными для фундаментальных теоретических исследований. С практической точки зрения пленочные течения реализуются в различных технологических процессах и аппаратах. В отличие от гравитационных пленок, пленочные течения при сложных условиях на межфазной поверхности (наличие термокапиллярного эффекта, воздействия газового потока) остаются недостаточно изученными как в теоретическом, так и в экспериментальном плане. В настоящей работе представлена модель волнового течения пленки с учетом касательного напряжения на поверхности пленки. Модель основана на интегральном подходе, погранслойном приближении и разложении скорости в ряд по системе базисных функций (гармоник), удовлетворяющих граничным условиям на поверхности жидкости и на стенке.

УРАВНЕНИЯ ВОЛНОВОГО ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ

Рассмотрим течение пленки вязкой жидкости на стенке, наклоненной под углом q к горизонту. Введем декартову систему координат *Oxyz* с осью *Ox* в направлении гравитации и осью *Oy* по нормали к стенке. Будем считать, что на поверхности пленки действует касательное напряжение, обусловленное, например, воздействием газового потока или вследствие термокапиллярного эффекта (в случае неизотермического течения).

Возмущение поверхности пленки считаем длинноволновым (толщина пленки h много меньше длины волны l) и используем пограничное приближение, полагая $\partial h/\partial x < 1$, $\partial h/\partial z < 1$, $\partial^2/\partial x^2 < \partial^2/\partial y^2$, $\partial^2/\partial z^2 < \partial^2/\partial y^2$. В первом приближении по параметру $\varepsilon = h/\lambda$ течение жидкости описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u^2 dy + \frac{\partial}{\partial z}\int_0^h uw dy = $$

$$= \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}^{y=h} + gh\left(\sin\theta - \cos\theta\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial \Delta h}{\partial x}\right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\int_0^h w^2 dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h uw dy = $$

$$= \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{y=0}^{y=h} + gh\left(-\cos\theta\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial \Delta h}{\partial z}\right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Здесь u, v, w – компоненты скорости по осям x, y, z соответственно, $q = \int_0^h u dy$ и $m = \int_0^h w dy$ – расходы жидкости по осям Ox и Oz соответственно, $\Delta h = \partial^2 h/\partial x^2 + \partial^2 h/\partial z^2$ – кривизна поверхности. На поверхности пленки выполняются граничные условия $\mu \partial u/\partial y = \tau_x$, $\mu \partial w/\partial y = \tau_z$, где компоненты касательного напряжения t_x и t_z считаются заданными величинами.

Для того, чтобы система уравнений (1)-(3) стала замкнутой относительно q, m, h, необходимо задать профили скорости $u(x,y,z,t)$, $w(x,y,z,t)$ и исключить напряжения на стенке. В двумерном случае для описания длинноволновых возмущений в гравитационной пленке В.Я. Шкадов разработал интегральную модель [4] в которой предполагается автомодельный профиль скорости

$$u/u_s = 2\eta - \eta^2 \quad (4)$$

Здесь $\eta = y/h$, u_s - скорость на поверхности пленки. В основе модели [4] лежит правдоподобное предположение, что для длинноволновых возмущений профиль скорости будет мало отличаться от невозмущенного профиля. В определенном диапазоне значений числа Капицы и при умеренных числах Рейнольдса модель [4] хорошо описывает характеристики нелинейных волн. В [5] модель [4] применялась для описания трехмерных волн в вертикальной пленке. По аналогии с двумерным случаем, для компоненты скорости w полагался автомодельный параболический профиль.

МОДЕЛЬ ВОЛНОВОГО ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ, ОСНОВАННАЯ НА РАЗЛОЖЕНИИ СКОРОСТИ В РЯД ПО ГАРМОНИКАМ

На интервале $0 < \eta < 1$ рассмотрим следующие линейно независимые базисные функции (гармоники) $f_j(\eta) = \sin\omega_j\eta$, где $\omega_j = (2j-1)\pi/2$, $j = 1,2,3\ldots..$ Гармоники f_j(h) удовлетворяют условиям $f_j(0) = df_j/d\eta\big|_{\eta=1} = 0$, $\int_0^1 f_j f_i d\eta = \delta_{ij}/2$, где d_{ij} - символ Кронекера. Любую непрерывную функцию F(h), определенную на интервале $0 < \eta < 1$ можно представить в виде ряда по гармоникам:

$$F(\eta) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j(\eta), \text{ где } a_j = 2\int_0^1 F(\eta)\sin\omega_j\eta d\eta.$$

Представим компоненты скорости u, w в виде:

$$u = \tau_x h\eta/\mu + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x,z,t) f_j(\eta)$$

$$w = \tau_z h\eta/\mu + \sum_{j=1}^{\infty} b_j(x,z,t) f_j(\eta), \quad (5)$$

где $\eta = y/h$. Нетрудно видеть, что профили скорости (5) удовлетворяют граничным условиям на стенке и на поверхности пленки. Исходя из (5), разность касательных напряжений на поверхности пленки и на стенке также разлагается в ряд:

$$\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}^{y=h} = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\nu\omega_j a_j}{h}, \quad \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{y=0}^{y=h} = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\nu\omega_j b_j}{h}. \quad (6)$$

Коэффициенты a_j и b_j в (5), (6) не имеют физической интерпретации, но их можно выразить через расходы q и m следующим образом. Первые слагаемые в (5), учитывающие касательное напряжение на поверхности пленки, представим в виде ряда по гармоникам:

$\eta = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j f_j(\eta)$, где $\gamma_j = 2(-1)^{j-1}/\omega_j^2$.

Таким образом, (5) запишем в виде

$$u = \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j + \frac{\tau_x h \gamma_j}{\mu}\right) f_j(\eta)$$

$$w = \sum_{j=1}^{\infty}\left(b_j + \frac{\tau_z h \gamma_j}{\mu}\right) f_j(\eta)$$

.

Расходы q, m тоже разложим в ряд:

$$q = h\sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j + \tau_x h\gamma_j/\mu\right)\int_0^1 f_j d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} q_j,$$

$$m = h\sum_{j=1}^{\infty}\left(m_j + \tau_z h\gamma_j/\mu\right)\int_0^1 f_j d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} m_j.$$

Здесь $q_j = h\left(a_j + \tau_x h\gamma_j/\mu\right)/\omega_j$ и $m_j = h\left(b_j + \tau_x h\gamma_j/\mu\right)/\omega_j$ - вклады j-ой гармоники в общий расход. Подставляя $a_j = q_j\omega_j/h - \tau_x h\gamma_j/\mu$ и $b_j = m_j\omega_j/h - \tau_z h\gamma_j/\mu$ в (6), получаем

$$\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0}^{y=h} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_j\omega_j\tau_x}{\rho} - \frac{\nu\omega_j^2 q_j}{h^2}\right),$$

$$\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{y=0}^{y=h} = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma_j\omega_j\tau_z}{\rho} - \frac{\nu\omega_j^2 m_j}{h^2}\right).$$

Потоки импульса $\int_0^h u^2 dy$, $\int_0^h w^2 dy$, $\int_0^h uw dy$ также можно представить в виде ряда. Учитывая ортогональность гармоник, получаем

$$\int_0^h w^2 dy = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega_j^2 m_j^2}{2h}, \quad \int_0^h u^2 dy = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega_j^2 q_j^2}{2h},$$

$$\int_0^h uw dy = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega_j^2 q_j m_j}{2h}.$$

Слагаемые в скобках в правой части уравнений (1), (2) с помощью тождества $1 = \sum_{j=1}^{\infty} 2/\omega_j^2$ также можно представить в виде ряда. В итоге уравнения (1), (2) запишем в виде

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\omega_j^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{q_j^2}{h} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{q_j m_j}{h}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\gamma_j\omega_j\tau_x}{\rho} + \frac{2gh}{\omega_j^2}\left(\sin\theta - \frac{\partial h}{\partial x}\cos\theta + \frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial\Delta h}{\partial x}\right) - \frac{\nu\omega_j^2 q_j}{h^2},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial m_j}{\partial t} + \frac{\omega_j^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{m_j^2}{h} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{q_j m_j}{h}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\gamma_j\omega_j\tau_z}{\rho} + \frac{2gh}{\omega_j^2}\left(-\frac{\partial h}{\partial z}\cos\theta + \frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial\Delta h}{\partial z}\right) - \frac{\nu\omega_j^2 m_j}{h^2}.$$

Вследствие линейной независимости гармоник каждый член ряда в левой части этих уравнений равен соответствующему члену ряда в правой части. Таким образом, для $q_j(x,z,t)$ и $m_j(x,z,t)$, $j = 1,2,3\ldots$ имеем цепочку уравнений:

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\omega_j^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{q_j^2}{h} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{q_j m_j}{h}\right) = \frac{2(-1)^{j-1}\tau_x}{\rho\omega_j} +$$

$$+ \frac{2gh}{\omega_j^2}\left(\sin\theta - \frac{\partial h}{\partial x}\cos\theta + \frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial\Delta h}{\partial x}\right) - \frac{\nu\omega_j^2 q_j}{h^2}, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial m_j}{\partial t} + \frac{\omega_j^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{m_j^2}{h} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{q_j m_j}{h}\right) =$$

$$= \frac{2(-1)^{j-1}\tau_z}{\rho\omega_j} + \frac{2gh}{\omega_j^2}\left(-\frac{\partial h}{\partial z}\cos\theta + \frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial\Delta h}{\partial z}\right) - \frac{\nu\omega_j^2 m_j}{h^2}. \qquad (8)$$

Уравнение (3) при этом принимает вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\partial q_j}{\partial x} + \frac{\partial m_j}{\partial z}\right) = 0 \qquad (9)$$

.

Таким образом, при заданных t_x, t_z получается замкнутая система уравнений (7)-(9) для $q_j(x,z,t)$, $m_j(x,z,t)$, $h(x,z,t)$.

Отметим, что в модели [4] уравнения импульса имеют вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{q^2}{h} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{qm}{h}\right) = \frac{3\tau_x}{2\rho} +$$

$$+ gh\left(\sin\theta - \cos\theta\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial\Delta h}{\partial x}\right) - \frac{3\nu q}{h^2}, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{6}{5}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{m^2}{h} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{qm}{h}\right) =$$

$$= \frac{3\tau_z}{2\rho} + gh\left(-\cos\theta\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\sigma}{\rho g}\frac{\partial\Delta h}{\partial z}\right) - \frac{3\nu m}{h^2}. \qquad (11)$$

Из сравнения (7)-(8) и (10)-(11) видно, что в предлагаемой модели уравнения импульса имеют такую же структуру, как в модели [4], но отличаются численными коэффициентами. Таким образом, предлагаемая модель является, в некотором роде, обобщением модели [4], но, в отличие от нее, обладает большей «степенью свободы» для профиля скорости. Выберем в качестве масштаба расстояния толщину невоз-

мущенной пленки h_0 и введем масштабы скорости $u_m = gh_0^2/3\nu$, времени $t_m = h_0/u_m$, расхода $q_m = gh_0^3/3\nu$, напряжения $\tau_m = \rho g h_0/3$. Перейдем к безразмерным переменным x/h_0, h/h_0, q_j/q_m, t/t_m, m_j/q_m, τ/τ_m, сохранив прежние буквенные обозначения. В безразмерных переменных уравнения (7)-(9) примут вид:

$$\frac{\partial q_j}{\partial t}+\frac{\omega_j^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{q_j^2}{h}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{q_j m_j}{h}\right)=\frac{3}{\mathrm{Re}_m}\left(\frac{2\tau_x(-1)^{j-1}}{3\omega_j}+\right.$$

$$\left.+\frac{2h}{\omega_j^2}\left(\sin\theta-\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\frac{\omega_j^2 q_j}{3h^2}\right)+\frac{2hWe}{\omega_j^2}\frac{\partial\Delta h}{\partial x}, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial m_j}{\partial t}+\frac{\omega_j^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{m_j^2}{h}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{q_j m_j}{h}\right)=\frac{3}{\mathrm{Re}_m}\left(\frac{2\tau_z(-1)^j}{3\omega_j}\right.$$

$$\left.-\cos\theta\frac{2h}{\omega_j^2}\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\omega_j^2 m_j}{3h^2}\right)+\frac{2hWe}{\omega_j^2}\frac{\partial\Delta h}{\partial z}, \qquad (13)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\partial Q_j}{\partial x}+\frac{\partial M_j}{\partial z}\right)=0. \qquad (14)$$

Здесь $We=\left(3Fi/\mathrm{Re}_m^5\right)^{1/3}$ – число Вебера, $Fi=\sigma^3/\rho^3 g\nu^4$ – число Капицы; $\mathrm{Re}_m = gh_0^3/3\nu^2$. В случае свободно стекающей пленки критерий Re_m связан с числом Рейнольдса пленки Re соотношением $\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_m\sin\theta$. Невозмущенному течению соответствует тривиальное решение $h=1$, $q_{0j}=6\sin\theta/\omega_j^4$, $m_j=0$.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ

Рассмотрим устойчивость свободно стекающей пленки ($\tau_{x0}=\tau_{z0}=0$, $m_{0j}=0$). Считая возмущение трехмерным, положим $h=1+H$, $q_j=q_{0j}+Q_j$, $m_j=M_j$, где H, Q_j, M_j - малые возмущения, которые представим в виде волны, распространяющейся в направлении оси Ox:

$$Q=Q_a\exp\left(i\alpha(x-Ct)+i\beta z\right),$$
$$H=H_a\exp\left(i\alpha(x-Ct)+i\beta z\right),$$
$$M=M_a\exp\left(i\alpha(x-Ct)+i\beta z\right).$$

Здесь α и β – компоненты вещественного волнового числа $k=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ по осям Ox и Oy; $C=C_R+iC_I$ – комплексная скорость волны. Ее реальная часть C_R дает фазовую скорость волны, а величина αC_I дает временной инкремент волны ($C_I>0$ соответствует растущему возмущению). Линеаризуя уравнения (12)-(14) относительно H, Q_j, M_j, после некоторых преобразований получаем дисперсионное уравнение для комплексной скорости волны

$$C=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{\omega_j^2}\left(\frac{3E_j+i\alpha\,\mathrm{Re}_m D_j/\omega_j^2}{1+i\alpha\,\mathrm{Re}_m\left(2E_j-C\right)/\omega_j^2}\right). \qquad (15)$$

Здесь обозначено $E_j=3\sin\theta/\omega_j^2$, $D_j=E_j^2-B$, $B=3\cos\theta\left(1+(\beta/\alpha)^2\right)/\mathrm{Re}_m+We\alpha^2\left(1+(\beta/\alpha)^2\right)^2$.

В общем случае произвольных значений α и β уравнение (15) решалось численно методом итераций. Так же как в модели [4], уравнение (15) кроме неустойчивой моды описывает также затухающую моду, для которой инкремент отрицательный при любых значениях α.

Асимптотика aRe_m<<1.

В случае двумерных волн (b = 0) в асимптотике $a\mathrm{Re}_m << 1$ из (15) получаем

$$C_R=3\sin\theta,\ C_I=\alpha\,\mathrm{Re}_m\left(\frac{41}{35}\sin^2\theta-\frac{\cos\theta}{\mathrm{Re}_m}-\frac{We\alpha^2}{3}\right).$$

Отсюда находим критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_*=(35/41)ctg\theta$. Это довольно близко к значению $\mathrm{Re}_*=(5/6)ctg\theta$, полученному из уравнения Орра-Зоммерфельда (отличие 2,5%).

В случае трехмерных волн нетрудно получить уравнение нейтральной кривой. Подставляя в (15) C_I=0, C_R=3sinθ, после некоторых преобразований получаем:

$$\frac{\cos\theta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{\mathrm{Re}_m}+\frac{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2 We}{3}=\frac{41}{35}\left(\alpha\sin\theta\right)^2 \quad (16).$$

Отметим, что для модели [4] уравнение нейтральной кривой имеет вид

$$\frac{\cos\theta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{\mathrm{Re}_m}+\frac{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2 We}{3}=\left(\alpha\sin\theta\right)^2$$

и отличается от (16) только коэффициентом 41/35. На рис. 1 приведена расчетная нейтральная кривая для трехмерных волн на вертикальной пленке воды при Re=20. Там же для сравнения показан расчет по модели [4]. Как видно из рисунка, представленная модель дает более широкую область неустойчивости по сравнению с моделью [4].

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН

Волновые режимы течения пленки получены решением уравнений (12)-(14) конечно-разностным методом. Численный алгоритм для двумерного случая подробно описан в [1], аналогичная разностная аппроксимация и алгоритм решения были использованы для трехмерного течения.

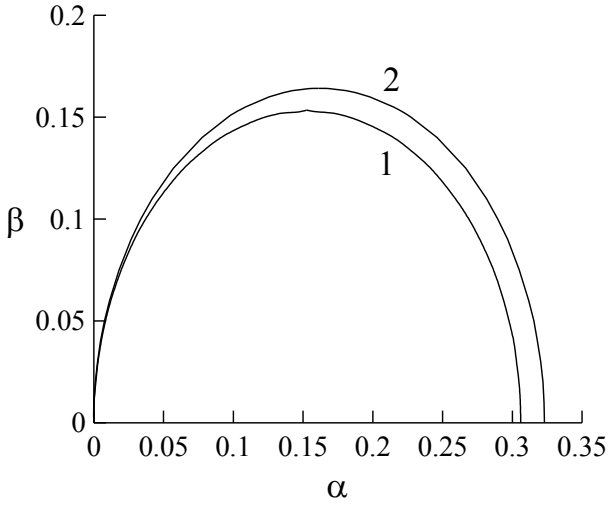

Рис.1 Нейтральная кривая для трехмерных волн на вертикальной пленке воды; 1 – модель [4]; 2 – расчет по предложенной модели; Re=20.

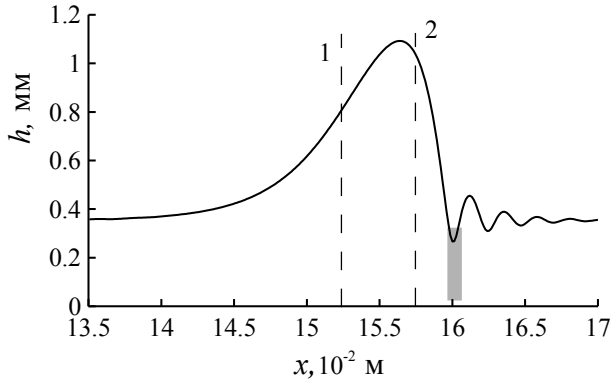

Рис.2 Расчетный профиль волны (λ=36 мм; Re=12.4).

В работе [6] проведены измерения волновых характеристик и профилей скорости для возбужденных двумерных волн на поверхности вертикальной пленки жидкости (водоглицериновый раствор, $\nu = 7.2 \cdot 10^{-6}$ м^2/с, $\sigma/\rho = 57.6 \cdot 10^{-6}$ м^3/с^2). Измерения профилей скорости проводились методом стробоскопической визуализации частиц для трех значениях длины волны при Re=12.4. На рис. 2–4 приведены результаты расчета установившихся двумерных волн (длина волны 36 мм), сделанных для условий экспериментов [6].

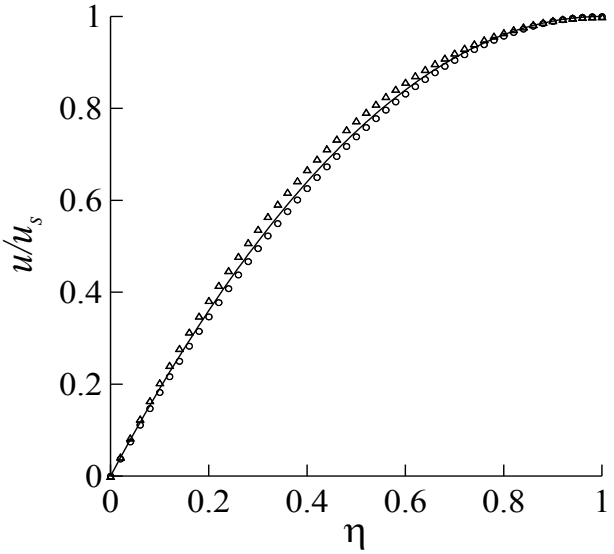

Рис.3 Профиль скорости (нормированной на us) для волны, показанной на рис. 2; Δ – сечение 1, ○– сечение 2; сплошная линия – автомодельный профиль (4).

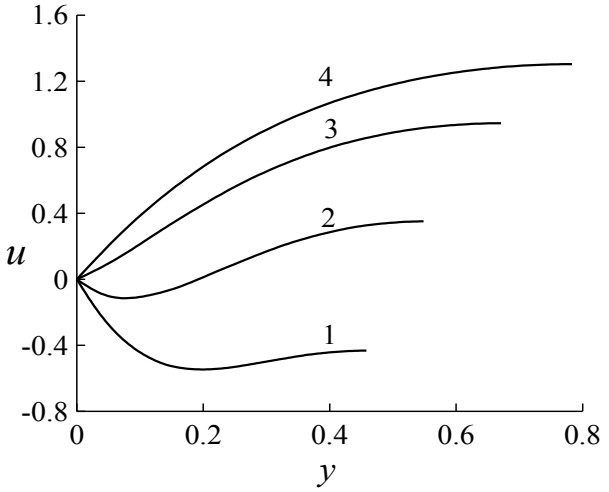

Рис.4 Профиль скорости в зоне минимума (показана на рис.2 серым цветом) для значений координаты: 1–16.01, 2–16.04; 3–16.07; 4–16.12.

На рис. 2 показан расчетный профиль волны. Цифрами 1 и 2 обозначены сечения в обла-

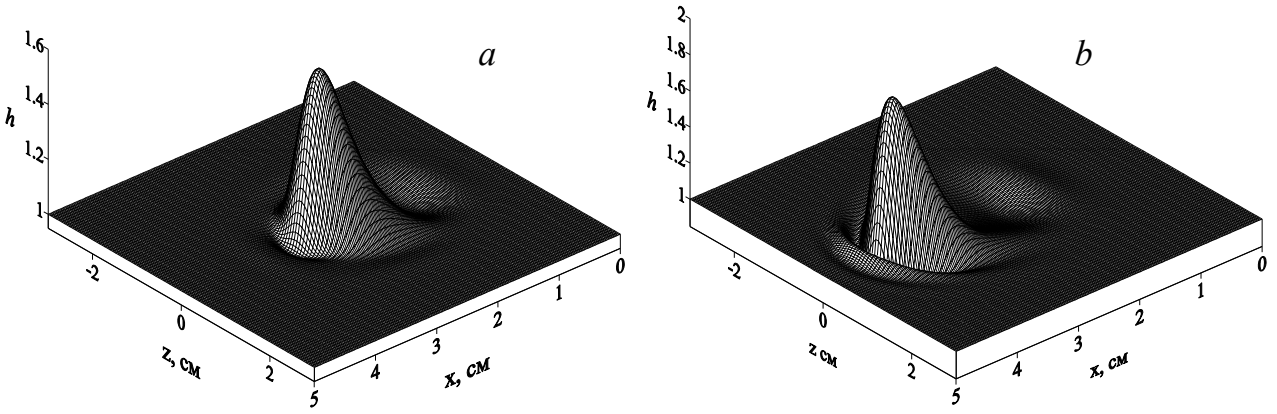

Рис.5 Эволюция локализованной трехмерной волны на вертикальной пленке воды при Re=20. Поверхность пленки на моменты времени a – t = 0.5, b – t = 0.9.

сти пика, для которых на рис. 3 приведены профили скорости, нормированной на поверхностную скорость u_s. Серым цветом выделен узкий участок в окрестности минимума, для которого профили скорости приведены на рис. 4. В области пика профиль скорости (рис. 3) мало отличается от автомодельного профиля (4), хотя может быть как более заполненным, так и менее заполненным. Эти факты согласуется с данными [6].

В окрестности минимума профиль скорости (рис. 4) сильно отличается от (4). Скорость может быть даже отрицательной по всему сечению пленки (кривая 1) или только около стенки (кривая 2). Хотя в экспериментах [6] не было зафиксировано отрицательной скорости, это легко объясняется малой протяженностью участка с отрицательными значениями скорости.

На рис. 5 показана эволюция локализованной трехмерной волны на вертикальной пленке воды при Re=10. В начальный момент времени в области $|x-l|<l$, $|z|<l$, где l=10^{-2} м задавалось локализованное возмущение толщины пленки: $\delta h = 0{,}1\cdot(1+\cos(\pi(x-l)/l))\cdot(1+\cos(\pi z/l))$. Из рис. 5 видно, что первоначально симметричный горб приобретает подковообразную форму с крутым передним и пологим задним склонами. По мере распространения горба его амплитуда растет, а впереди развивается капиллярный предвестник. Отметим, что показанное на рис. 5 возмущение не развивается в стационарно бегущий трехмерный солитон, который был получен в расчетах [7]. Расчеты показали, что за первым горбом постепенно развивается новый горб меньшей амплитуды, который движется медленней первого горба. В конечном счете, на поверхности пленки образуется цепочка убывающих по амплитуде горбов с возрастающим расстоянием между ними.

ВЫВОДЫ

Для описания трехмерного волнового течения пленки жидкости разработана модель, которая не предполагает автомодельность профиля скорости и учитывает наличие касательного напряжения на межфазной поверхности. Результаты расчетов для двумерных волн хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Актершев С.П., Алексеенко С.В. Волны в стекающей пленке жидкости // Современная наука: исследования, идеи, результаты, технологии.–2012.–№ 2 (10).–С. 73-78.

Aktershev S.P., Alekseenko S.V. (2012), “Waves in a falling film”, in *Modern science: collection of research papers,* № 2 (10), pp. 73-78.

2. S.P. Aktershev and S.V. Alekseenko (2013), “Model of a wavy flow in a falling film of a viscous liquid” *J. Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 54, No 2, pp. 185-194
3. Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. – 1948. –Т. 18. – № 1. – С. 3-28. Kapitza P.L. (1948), “Wave flow of thin layers of a viscous fluid” *Zhur. Eksperim. i Teor. Fiz.* Vol 18, pp. 3-28.
4. Шкадов В.Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. –1967 –№ 1. – С. 43-51. Shkadov V.Ya. (1967), “Wave modes in the flow of thin layer of a viscous liquid under the action of gravity”, *Izv. Acad. Nauk SSSR, Mech. Zhid. Gaza*, No 1, pp. 43-51.
5. Трифонов Ю.Я., Цвелодуб О.Ю.. Волновые режимы в стекающих пленках жидкости // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью. – Новосибирск: ИТФ СО АН СССР– 1985– С. 82-102. Trifonov Yu.Ya., Tsvelodub O.Yu. (1985), “Wave modes in the falling liquid films”, in *Hydrodynamics and Heat and Mass Transfer of Liquid Flows with a Free Surface,* Institute of Thermophysics, SB Acad. Sci. USSR, Novosibirsk, pp. 82-102.
6. S.V. Alekseenko, V.Ye. Nakoryakov, B.G. Pokusaev (1985), “Wave formation on a vertical falling liquid film”, *AIChE*, Vol. 31, No. 9, pp. 1446-1460.
7. Петвиашвили В.И., Цвелодуб О.Ю. Подковообразные солитоны на стекающей пленке жидкости // ДАН СССР –1978– Т. 238– №6. – С. 1321-1323. Petviashvili V.I., Tsvelodub O.Yu. (1978), “Horseshoe-shaped solitons on a falling liquid film”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, Vol. 238, pp. 1321-1323.

