УДК 532.526 : 532.24

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ЗАМОРАЖИВАНИИ И РАЗМОРАЖИВАНИИ ПОРИСТЫХ СРЕД

Приходько А.А., Алексеенко С.В.

Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск, Украина

АННОТАЦИЯ

Для математического моделирования нестационарных процессов при замораживании и размораживании пористых сред использованы метод выделения фронта фазового перехода и метод эффективной теплоемкости. Оба метода реализованы с помощью метода контрольных объемов. Представлены результаты численных экспериментов по размораживанию пористого грунта в гаражах-тепляках, проведено сравнение с экспериментальными данными. Полученные результаты позволили оценить время размораживания смерзшихся грузов в вагонах, сократить время простоев подвижного состава, наметить пути снижения затрат энергии, а также дальнейшего усовершенствования технологического процесса.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое внимание уделяется проблемам разработки и применения энергосберегающих технологий во многих отраслях: в металлургии, добывающей и перерабатывающей промышленности, транспорте, производстве строительных материалов. Часто при решении таких задач необходимо рассматривать процессы тепломассопереноса с фазовыми переходами.

Развитие численных методов решения задач математической физики и повышение быстродействия компьютеров позволило приступить к решению сложных нестационарных пространственных задач со свободными границами. В этом случае граница области, в которой ищется решение, неизвестна и определяется в процессе самого решения задачи. Классическим примером задач такого типа является задача Стефана – задача с фазовыми переходами как, например, образование льда, затвердевание слитка, сварка, плавка, фильтрация и т.д.

Результаты решения задачи Стефана в квазистационарной постановке рассмотрены в работах [1, 2]. Такая постановка задачи Стефана применялась при исследовании процессов сварки [3], процессов проплавления и затвердевания [4], зонной плавки [5, 6], совершенствовании технологии приготовления качественных слитков, связанных с непрерывной разливкой стали [4, 7].

В нестационарной постановке вопросы существования и единственности решения задачи Стефана были исследованы в работах [2, 8].

Численные методы с выделением фронта фазового перехода обычно применялись при решении одномерных задач. При решении многомерных задач чаще всего использовались методы сквозного счёта. При этом в работах [9, 10] использовался метод прямых, схема с выпрямлением фронта применялась в работе [10]. Подвижные нерегулярные сетки использовались в работе [11]. Метод подстраивающихся конечных элементов применён к решению задачи Стефана в работах [1, 8].

Обширный класс задач со свободными границами появляется при исследовании динамики жидкости со свободными границами [12]. Однако, численные методы решения таких задач в гидродинамике, особенно вязкой жидкости, не получили пока достаточного развития [13, 14]. Идея преобразования переменных при конечно-разностном решении задач гидродинамики идеальной жидкости использована в ра-

© Приходько А.А., Алексеенко С.В.

боте [12]. Решение задачи об истечении вязкой несжимаемой жидкости на основе уравнений Навье-Стокса с учетом динамики изменения формы свободной поверхности на подвижных сетках получено в [15]. Численно-аналитический метод применён к решению задач со свободными поверхностями в работе [13].

Основные результаты в вычислительной гидродинамике жидкости со свободными поверхностями получены при использовании метода частиц в ячейках и его модификаций [16]. Вопросам численного решения задач со свободными границами для течений вязкой несжимаемой жидкости посвящены работы [1, 16]. Задачи фильтрации, в том числе и со свободными границами, представлены в монографии [1, 17].

Математическая постановка задачи промерзания (протаивания) влажного грунта впервые была предложена в [18]. В настоящее время она часто используется и в других отраслях знаний.

Ниже представлены результаты комплексных теоретических и экспериментальных исследований размораживания сыпучих грузов в гаражах-тепляках.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одним из важнейших условий выполнения графика работы тепловых электростанций, металлургических комбинатов и предприятий других отраслей промышленности есть обеспечение бесперебойной подачи каменного угля, руды, строительных материалов и т.д. В зимних условиях при транспортировке по железной дороге сыпучие грузы смерзаются в вагонах, что сильно затрудняет их выгрузку, осложняет работу транспорта и промышленных предприятий.

Основной причиной смерзания насыпных грузов зимой является их повышенная влажность. В большинстве случаев разгрузка таких грузов невозможна без предварительного разрыхления или оттаивания. Из-за чего в пунктах выгрузки сырья и топлива часто происходят задержки и скапливается большое количество вагонов со смерзшимися грузами. Поэтому для промышленности и железных дорог вопросы размораживания сыпучих грузов зимой чрезвычайно актуальны.

Оттаивание пористых сред в вагонах чаще всего осуществляется в гаражах-тепляках. Тепляк для размораживания грузов, представляет собой капитальное сооружение с камерами оттаивания, специальными устройствами для выработки и подачи в них теплоносителя, имеющего высокую температуру.

Передача тепла пористой среде может осуществляется конвекцией при обтекании стенок газами, а также радиацией от факела и раскаленных стенок. Время размораживания грузов составляет от десятков минут до нескольких часов в зависимости от начальной температуры, влажности и пористости сыпучей среды.

Промерзание и протаивание влагосодержащих пористых сред сопровождается сложными процессами тепломассопереноса. Это фазовые превращения жидкости, изменение льдистости, влаготеплоперенос, взаимодействие поровой влаги со скелетом среды. Тепло передается молекулярной теплопроводностью, фильтрацией, конвекцией.

В постановке задачи Стефана исходные уравнения приходится решать в зоне талого и мерзлого состояния среды отдельно. Предполагается, что на неизвестной границе фазового перехода, представленной нулевой изотермой, имеет место разрыв тепловых потоков, пропорциональный скорости перемещения границы. Метод эффективной теплоемкости базируется на обобщенной постановке задачи с размазыванием фронта фазового перехода. В результате получаем для всей области мерзлого и талого состояния одну систему уравнений. Обе постановки задачи позволяют эффективно находить решения прикладных задач, получать результаты, удовлетворительно описывающие моделируемые процессы, выбирать оптимальные параметры и схемы подвода теплоносителя.

Процесс распространения тепла с учетом кондуктивного и конвективного переносов описывают уравнением:

$$c_c \rho_c \frac{\partial T}{\partial t} = div(\lambda_c grad T - \overline{V}_b c_b \rho_b T) , \quad (1)$$

где c_c, ρ_c – удельная теплоемкость и плотность среды, λ_c – коэффициент теплопроводности среды, $\overline{V}_b$ – скорость движения влаги, c_b, ρ_b – удельная теплоемкость и плотность влаги, T – температура среды, t – время.

Движущей силой миграции влаги выступает градиент полного термодинамического потенциала грунтовой влаги H. Значение потенциала H зависит от влагосодержания, минерального состава твердой фазы, строения порового пространства. Скорость движения незамерзшей воды через поры определялась с помощью соотношения $\overline{V}_b = -k\,grad\,H$, здесь k – коэффициент влагопереноса.

Поток влаги $\overline{q}$, проходящий через единичную площадь в единицу времени под действием градиента потенциала влаги $grad\,H$ и градиента температуры $grad\,T$, можно выразить соотношением:

$$\overline{q} = -k\left(grad\,H + \frac{\delta}{\mu} grad\,T \right). \qquad (2)$$

На основе законов сохранения для описания влагопереноса получаем следующее уравнение в частных производных:

$$\gamma \frac{\partial H}{\partial t} = div\left[k\left(grad\,H + \frac{\delta}{\mu} grad\,T \right) \right]. \qquad (3)$$

В уравнениях (2), (3) γ – объемная изотермическая массоемкость, μ – вязкость порового раствора,

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial T}$$

– термодинамический коэффициент, W – объемное содержание влаги.

Таким образом, математическая постановка задачи влагопереноса в пористых мерзлых грунтах основывается на системе дифференциальных уравнений (1), (3) при соответствующих начальных и граничных условиях.

Экспериментальные исследования разогрева смёрзшихся грузов выполнялись на специально разработанной установке (рис.1). В разъёмном корпусе установки размещались три модели четырехосных металлических полувагона. Ввод теплоносителя в рабочий объём осуществлялся сверху через завихрители, установленные вдоль вертикальной продольной оси вагонов. В качестве теплоносителя использовался атмосферный воздух, который подавался в рабочее пространство воздуходувкой.

Каждый эксперимент включал несколько операций: исходный материал с заданной влажностью и загружался в вагоны, в один из которых устанавливался блок датчиков для измерения температуры в слое материала; вагоны помещались в морозильную камеру и груз замораживался; затем вагоны со смерзшимся материалом помещались в рабочий объём установки. В ходе экспериментов контролировался расход теплоносителя, его температура до и после взаимодействия с грузом, температура размораживаемого груза в 27 точках, время размораживания. Эксперимент продолжался до полного размораживания материала и выхода температуры на стационарный режим [19, 20].

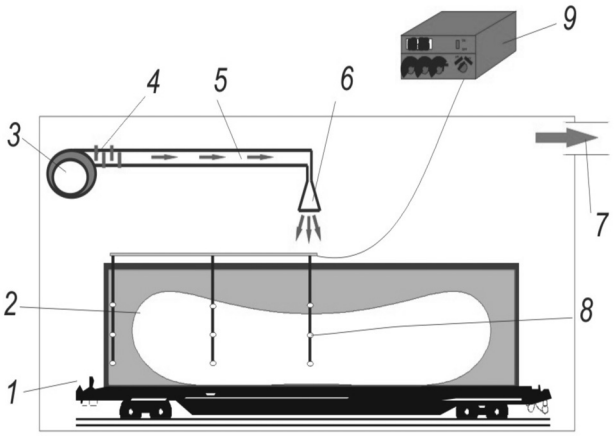

Рис.1 Схема экспериментальной установки: 1 – корпус установки; 2 – макет вагона с грузом; 3 – воздуходувка; 4 – нагрева тельные элементы; 5 – коллектор; 6 – завихритель; 7 – патрубок; 8 – термодатчики; 9 – блок сбора информации.

В данном случае вследствие мелкодисперсности грунта и, соответственно, незначительной скорости фильтрации влагопереносом можно пренебречь. Тогда для решения задачи с фазовым переходом в пористом теле можно воспользоваться уравнением теплопроводности в виде:

$$c_c \rho_c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{cx} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{cy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{cz} \frac{\partial T}{\partial z} \right), \qquad (4)$$

где λ_{cx}, λ_{cy}, λ_{cz} – коэффициенты теплопроводности среды в направлениях координат 0x, 0y и 0z соответственно.

В начальный момент времени задается распределение температуры в расчетной области (рис.1):

$$T(x,y,z,0) = T_i(x,y,z) \ . \qquad (5)$$

На внешних границах расчетной области задаются тепловые потоки, которые определяются через температуру теплоносителя и коэффициенты теплоотдачи в зависимости от температуры границы:

$$T = T_z(t) \ ,$$

$$\lambda_{cx}\frac{\partial T}{\partial x}n_x + \lambda_{cy}\frac{\partial T}{\partial y}n_y + \lambda_{cz}\frac{\partial T}{\partial z}n_z + \\ + q + \alpha^k(T - T_\alpha) = 0 \ , \qquad (6)$$

где $T_н$ – начальное распределение температуры; $T_г$ – температура на границе области в случае задания граничных условий через температуру; n_x, n_y, n_z – направляющие косинусы по соответствующим осям координат x, y и z; q – удельный тепловой поток; α^k – коэффициент конвективного теплообмена в случае задания соответствующей внешней температуры T_α.

На верхней границе распределение температуры и коэффициент теплоотдачи определяется из соотношений для потока, набегающего на препятствие.

На подвижной границе раздела фаз с температурой, равной температуре фазового перехода, задается условие сопряжения, известное также как условие Стефана:

$$\left(\lambda_{ci}\frac{\partial T_{ci}}{\partial n} - \lambda_{\tilde{n}\grave{o}}\frac{\partial T_{\tilde{n}\grave{o}}}{\partial n}\right)_{S_t} = l\rho\frac{\delta n}{\delta t} \ , \qquad (7)$$

где T_{ci} , $T_{c\grave{o}}$, λ_{ci} , $\lambda_{c\grave{o}}$ – температура и коэффициенты теплопроводности твердой и жидкой фаз соответственно; l – скрытая теплота фазового перехода, отнесенная к единице массы; $F(x,y,z,t) = 0$ – уравнение поверхности раздела фаз S_t.

В случае применения метода эффективной теплоемкости, динамику поля температур T(x,y,z,t) в замкнутой области D(x,y,z) определяем, решая уравнение (2). Метод состоит в использовании коэффициента эффективной теплоемкости в форме:

$$c_{\acute{y}} = c_{\tilde{n}} - l\omega\frac{\partial W}{\partial T} \ , \qquad (8)$$

где ω – общая влажность, W – параметр относительной весовой льдистости.

Входящие в (4) и (8) удельная теплоёмкость и коэффициент теплопроводности зависят от содержания льда и могут быть представлены в виде:

$$c_c = c_{c\grave{o}} + (\tilde{n}_{ci} - \tilde{n}_{c\grave{o}})W, \\ \lambda_c = \lambda_{c\grave{o}} + (\lambda_{ci} - \lambda_{c\grave{o}})W, \qquad (9)$$

где $c_{c\grave{o}}$, c_{ci} – удельные теплоемкости, $\lambda_{c\grave{o}}$, λ_{ci} – коэффициенты теплопроводности талого и мерзлого грунта соответственно.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Для решения задачи использован метод контрольных объемов [21, 22]. Дискретный аналог уравнения (4) в одномерном случае имеет следующий вид:

$$a_P T_P = a_E\left[fT_E + (1-f)T_E^0\right] + \\ + a_W\left[fT_W + (1-f)T_W^0\right] + \\ + \left[a_P^0 - (1-f)a_E - (1-f)a_W\right]T_P^0 , \qquad (10)$$

где

$$a_E = \frac{\lambda_T}{(\delta x)_e} ,$$

$$a_W = \frac{\lambda_W}{(\delta x)_w} ,$$

$$a_P^0 = \frac{\rho c \Delta x}{\Delta t} , \qquad (11)$$

При f = 0 – получаем явную схему, f = 0,5 – схема Кранка-Николсона, f = 1 – полностью неявная схема.

$$a_P = fa_E + fa_W + a_P^0 .$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Расчетная схема полувагона приведена на рис.2. При проведении эксперимента размеры модели составляли 56 см х 12 см х 13 см (длина × высота × ширина). Температура теплоносителя на выходе из завихрителя принималась равной + 24° С, около стенок и днища модели вагона – + 14° С. Начальная температура груза – – 15,5° С. Распределение температуры и коэффициента конвективного теплообмена над поверхностью грунта определялось из соотношения для натекания струи на препятствие [23].

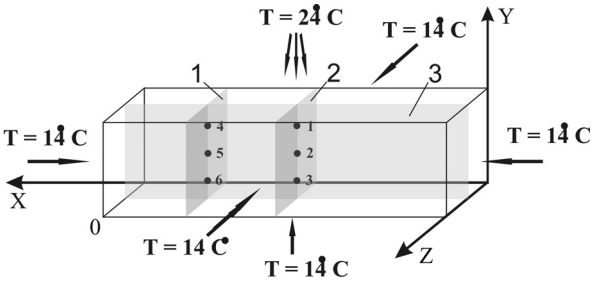

Рис.2 Расчетная схема.

Таким образом, в данном эксперименте не имели место подобласти: скелет и пар, и спекшийся скелет.

Значения остальных параметров принимались следующими: ρ = 2300 кг/м^3; $c_{ст}$ = 0,160 ккал/(кг · град); $c_{см}$ = 0,180 ккал/(кг · град); l = 80 ккал/кг; ω = 0,16; $\lambda_{ст}$ = 0,72 ккал/(м·ч·град); $\lambda_{см}$ = 0,76 ккал/(м·ч·град).

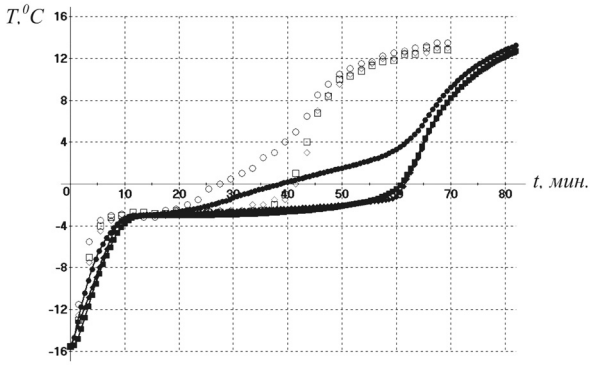

Рис.3 Зависимость температуры среды T от времени размораживания t в двумерной постановке, где ○, □, ◊ – экспериментальные данные, ●, ■, ♦ – теоретические значения в точках 4, 5 и 6 соответственно.

Для решения данной задачи в одномерной, двумерной и трехмерной постановках был выбран метод эффективной теплоемкости, поскольку он учитывает тот факт, что замерзание поровой влаги происходит в некотором диапазоне отрицательных температур. Также в двухмерной и трехмерной постановках метод эффективной теплоемкости более прост в реализации по сравнению с методом выделения фронта фазового перехода [20].

На рис.3 показана зависимость температуры груза от времени в точках 4, 5 и 6, полученная путём математического моделирования для двумерного случая и экспериментального исследования.

На рис.4 приведено решение для трехмерного случая. Анализируя полученные результаты, становится очевидным, что для получения адекватного решения необходимо использовать трехмерную постановку, т.к. распределение температуры по координате *OZ* играет существенную роль в рассматриваемом процессе.

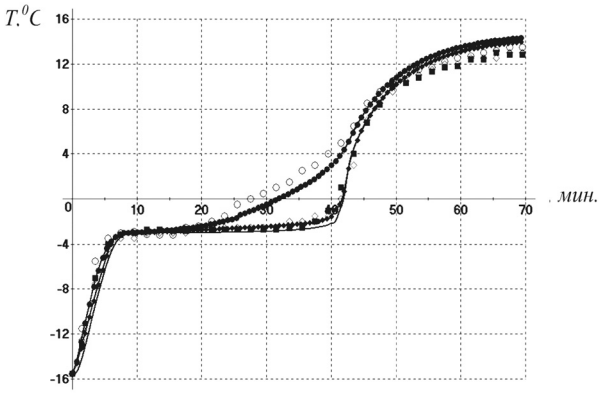

Рис.4 Зависимость температуры среды T от времени размораживания t в трехмерной постановке, где ○, □, ◊ – экспериментальные данные, ●, ■, ♦ – теоретические значения в точках 4, 5 и 6 соответственно.

Рис.5 демонстрирует распределение температуры по высоте в центре вагона, полученное в результате численного решения.

Также была исследована динамика изменения положения фронта фазового перехода в объёме вагона в зависимости от времени при различных способах подвода и температуре теплоносителя для различных начальных температур груза. Рис.6 иллюстрирует динамику рассчитанных положений фронта фазового перехода в диапазоне t = 10-39 мин.

в среднем сечении вагона *XOY* при верхнем подводе теплоносителя для начальной температуры угля – 15,5°С и температуре теплоносителя + 24°С.

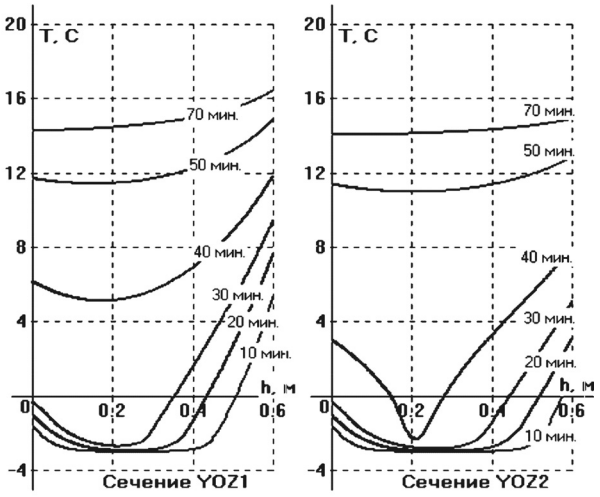

Рис.5 Распределение температуры среды Т по высоте в центре рассматриваемого сечения в соответствии с рис.2.

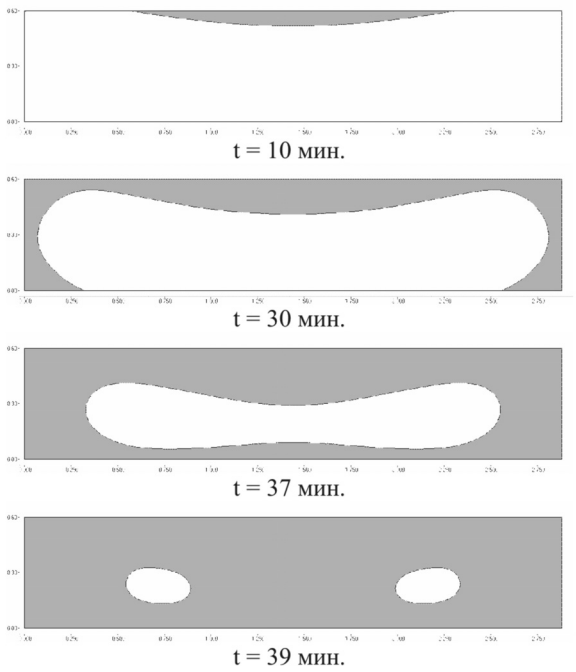

Рис.6 Динамика положений фронта фазового перехода в сечении *XOY* (при подводе теплоносителя сверху).

ВЫВОДЫ

Для математического моделирования размораживания пористых сред использованы два подхода: метод выделения фронта фазового перехода и метод эффективной теплоёмкости.

Определено время размораживания угля в вагонах в зависимости от температуры наружного воздуха и длительности пребывания вагонов на открытом воздухе.

На основе проведенных исследований могут быть разработаны новые технологические схемы, получены оптимальные параметры теплоносителя и сокращены непроизводительные потери тепла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вабищевич П.Н. Численные методы решения нестационарных уравнений Навье-Стокса в естественных переменных на частично разнесенных сетках // Мат. Моделирование / Вабищевич П.Н., Павлов А.Н., Чурбанов А.Г.. 1997. Т9, №4. – С.85-114.
2. Уравнения в частных производных и задачи со свободной границей – Киев, 1983. – 136 с.
3. Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке / Н.Н. Рыкалин – М.: Машгиз, 1951. – 296 с.
4. Китаев Е.М. Затвердевание стальных слитков / Китаев Е.М. – М.: Металлургия, 1982. – 168 с.
5. Пфанн В. Зонная плавка / В. Пфанн – М.: Мир, 1970. – 368 с.
6. Ратников Д.Г. Бестигельная зонная плавка / Д.Г. Ратников – М.: Металлургия, 1976. – 224 с.
7. Ефимов В.А. Разливка и кристаллиза-

ция стали / Ефимов В.А. – М.: Металлургия, 1976. – 552 с.
8. Мейрманов А.М. Задача Стефана / А.М. Мейрманов – Новосибирск: Наука, 1986. – 240 с.
9. Изаксон В.Ю. Вопросы механики многолетних мерзлых пород / В.Ю. Изаксон – Новосибирск, 1990. – 177 с.
10. Изаксон В.Ю. Прогноз термомеханического состояния многолетнемерзлого массива / Изаксон В.Ю., Петров Е.Е., Ковлеков И.И. – Якутск: ЯИМ СО АН СССР, 1989. – 105 с.
11. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина – М.: Наука, 1977. – 664 с.
12. Эббот М.Б. Вычислительная гидравлика. Гидродинамика открытого потока / М.Б. Эббот – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 272 с.
13. Ершов Э.Д. Физико-химия и механика горных мерзлых пород / Э.Д. Ершов – М.: МГУ, 1986. – 334 с.
14. Цытович Н.А. Механика мерзлых грунтов / Н.А. Цытович – М.: Выс. школа, 1973. – 446 с.
15. Приходько А.А. К расчету симметричного и несимметричного слива жидкости из емкостей на основе уравнений Навье-Стокса // ИФЖ / А.А. Приходько – 1998, т.21, №5 – С. 855-859.
16. Николс Б. Дальнейшее развитие метода маркеров и ячеек для течений несжимаемой жидкости. Под ред. А.М. Белостоцкого – М.: Мир, 1973. – С. 165-173.
17. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы / Р. Коллинз – М.: Мир, 1994. – 350 с.
18. Колесников А.Г., К изменению математической формулировки о промерзании грунта // Докл. АН СССР / А.Г. Колесников – 1952, Т.32, №6. – С. 889-992.
19. Приходько А.А., Голуб В.Г., Бойко В.Н., Вильтовский А.В. Математическое моделирование и экспериментальное исследование размораживания пористых сред // Тепломассооообмен - ММФ-96. Тепломассообмен в капилярно-пористых телах. - Минск : АНК «ИТМО им. А.В. Лыкова» АНБ, 1996. Т. VII. - С. 50 - 54.
20. Приходько А.А. Численное моделирование процессов фазовых переходов пористых сред на основе решения задачи Стефана и метода эффективной теплоёмкости / А.А. Приходько, С.В. Алексеенко // Вісник Дніпропетровського університету. Механіка. – 2001. Вип.5, – Т.1.– С. 117-125.
21. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене / А.А. Приходько // Киев : Наукова думка, 2003. – 382 с.
22. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С.В. Патанкар – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
23. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. под ред. Авдуевского В.С. – М.: Машиностроение, 1992. – 528 с.