УДК 532.526:669.18

АНАЛИЗ КОНВЕКТИВНЫХ СТРУКТУР ПРИ ВЫНУЖДЕННОЙ И СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ОГРАНИЧЕННОМ ОБЪЕМЕ

Жук В.И., Хаджинов А.С.

Приазовский государственный технический университет, Мариуполь, Украина

АННОТАЦИЯ

Рассмотрены результаты численного решения системы уравнений Навье-Стокса и теплопроводности в ограниченном объеме среды при различных граничных условиях. Проведен анализ условий существования нестационарных, квазистационарных и стационарных течений в различных средах в режиме свободной и вынужденной конвекции. В стационарном случае вынужденной конвекции проводящей жидкости в скрещенных электрическом и магнитном полях обнаружена бифуркация в виде двухъячеистого и четырехъячеистого течения.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование процессов тепло - и массопереноса в условиях свободной и вынужденной конвекции жидкости и газа является одной из важнейших проблем гидро - и аэродинамики, теплоэнергетики, металлургии, химической технологии и других областей техники. Так, согласно работам [1,2], одной из актуальных задач металлургии является изучение процессов естественного и искусственного перемешивания кристаллизующихся расплавов в связи с внедрением в современную металлургию разнообразных принципов ускоренного тепломассообмена. Процессы затвердевания слитков и отливок больших размеров сопровождаются естественным конвективным перемешиванием расплавленного металла. В последние годы значительно расширился набор методов воздействия на затвердевающий металл с целью управления гидродинамикой расплава и, как следствие, качеством слитка. В исследованиях [3], посвященных этой проблеме, получены аналитические выражения, позволяющие оценить вклад в развитие конвективных перемещений теплового, гидродинамического и электромагнитного воздействия в рамках теории пограничного слоя для неограниченного объема расплава. Однако для слитка конечных размеров механизм развития конвекции в этих случаях и оценка степени воздействия до конца не раскрыты.

В другой технически важной задаче, рассматривается конвекция проводящей жидкости, заполняющей канал прямоугольного сечения, в скрещенных электрическом и магнитном полях. Конвекция вызвана сильной зависимостью проводимости от температуры. Температурный градиент поддерживается благодаря джоулевым источникам тепла, что дает возможность осуществить стационарный режим конвекции. Постановка такой задачи применительно к технологическим процессам, конечно-разностная аппроксимация, результаты расчета приведены в [4]. Однако оказалось, что стационарное решение системы в этом случае не является единственным, и необходимы дальнейшие исследования.

Целью настоящей работы является анализ численных решений системы уравнений для свободной и вынужденной конвекции в ограниченном объеме, их классификация, выбор критериев, необходимых для сравнения эффективности различных способов перемешивания.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Для численного моделирования используется современная компьютерная модель [5], позволяющая на основе математического аппарата произвести расчет распределения температур и полей скорости в условиях естественного и вынужденного перемешивания

жидкости с произвольными граничными условиями. Система уравнений Навье-Стокса, неразрывности и теплопроводности, описывающая процессы конвективного теплопереноса в области, заполненной подвижной средой, имеет вид (1-3):

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}\right]=-\nabla P+\eta\nabla^2\vec{V}+\rho\vec{g} \quad (1)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right)=0 \quad (2)$$

$$c\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)T\right)=\lambda\nabla^2 T \quad (3)$$

Здесь и далее приняты следующие условные обозначения: t – время, ∇ - оператор “набла”, ∇^2 - оператор Лапласа, $\vec{V}$ – вектор скорости течения среды, T – температура, P – давление, $\vec{g}$ - вектор ускорения свободного падения, ρ - плотность среды. Коэффициенты динамической вязкости η, теплопроводности λ, удельная теплоемкость c считаются константами, не зависящими от изменения температуры во всем объеме жидкости. Зависимостью плотности ρ от неоднородности температуры пренебрегать нельзя, так как именно она отвечает за возникновение конвективного движения в гравитационном поле. Поэтому к уравнениям (1-3) добавляется уравнение состояния $\rho = \rho(T)$ (4) .

$$\rho=\rho_0\left[1+\beta_T(T-T_0)\right] \quad (4)$$

В приближении Буссинеска. система (1-4) примет вид

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=\nu\nabla^2\vec{V}+\left[1+\beta_T(T-T_0)\right]\vec{g}-\frac{1}{\rho_0}\nabla P$$

$$\nabla\vec{V}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)T=a\nabla^2 T$$

Здесь $\nu=\eta/\rho$ – кинематическая вязкость среды, $a=\lambda/\rho c$ – коэффициент температуропроводности среды, β_T – коэффициент объемного теплового расширения среды. Эти уравнения для дальнейшей численной реализации записываются в переменных “функция тока - вихрь” в двумерной постановке для прямоугольной и цилиндрической области с учетом начальных и граничных условий. Для обобщения и анализа численных решений система приводится к безразмерному виду. Так, выбрав в качестве характерного размера ширину прямоугольной области x_0, и вводя масштабы скорости a/x0, времени x_0^2/a, температуры $T=T_1 - T_0$ (T_0 и T_1 — минимальное и максимальное значения температуры в среде), получаем систему уравнений с двумя параметрами Pr и Ra:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial Fo}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta_1}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta_1}-\frac{\partial\psi}{\partial\eta_2}\frac{\partial\Theta}{\partial\eta_2}=\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial\eta_1}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial\eta_2}\right),$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial Fo}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta_1}\frac{\partial\phi}{\partial\eta_1}-\frac{\partial\psi}{\partial\eta_2}\frac{\partial\phi}{\partial\eta_2}=\Pr\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\eta_2^2}\right)+Ra\frac{\partial\Theta}{\partial\eta_1},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta_1^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta_1^2}+\varphi=0, \qquad V_y=\frac{\partial\psi}{\partial\eta_1}, V_x=-\frac{\partial\psi}{\partial\eta_2},$$

$$V_y=\frac{\partial\psi}{\partial\eta_1}, V_x=-\frac{\partial\psi}{\partial\eta_2},$$

где ψ - функция тока, φ – вихрь, Vx – горизонтальная компонента вектора скорости, Vy – вертикальная компонента вектора скорости, η_1 – безразмерная координата x, η_2 – безразмерная координата y, безразмерная температура $\theta(\eta_1,\eta_2,F_0)=(T-T_0)/(T_1-T_0)$, $Fo=at/x_0^2$ – безразмерное время (число Фурье), $Pr=\nu/a$ – число Прандтля, $Gr=\beta g x_0^3\Delta T/\nu^2$ –число Грасгофа, $Ra=GrPr^2$ – число Рэлея.

Для получения численного решения уравнений используются явные и неявные конечно-разностные схемы второго порядка аппроксимации. Обеспечение симметрии схемы проводится путем решения с двойной точностью. Для численной реализации полученных математических моделей и алгоритмов в [5] созданы программы расчета, имеющие удобный для пользователя интерфейс, в котором данные представлены в виде картин линий тока и изотерм. Для анализа поведения системы и интенсивности перемешивания вычислялись безразмерные интегральные удельные величины (на единицу объема): кинетическая энергия, мощность перемешивания, теплосодержание. Оценка эффективности перемешивания производилась по величине отношения среднеквадратичного отклонения температуры к средней температуре области $\varepsilon=\delta\theta/\langle\theta\rangle$. Этот коэффициент, по сути, характеризует неоднородность системы по температуре. Аналогичным образом могут быть введены коэффициенты неоднородности по составу и другим параметрам.

КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

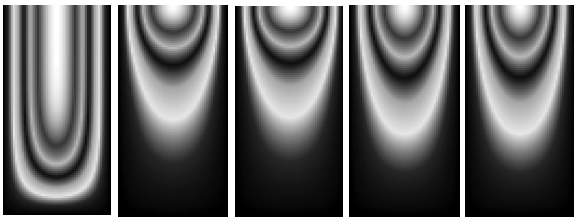
Численные исследования проводились для различных значений чисел Прандтля и Рэлея в области прямоугольной формы с соотношением сторон 2:1 при теплоизоляции верхней границы. Полученные решения можно разделить на следующие три группы в зависимости от граничных условий, времени и способов воздействия на среду: нестационарная естественная конвекция (тепловая, концентрационная, гравитационная), квазистационарная естественная конвекция, стационарная вынужденная конвекция (механическая, вибрационная, электромагнитная).

Нестационарная естественная тепловая конвекция развивается в ограниченном объеме в случае внешнего охлаждения среды при отсутствии внутренних источников тепла и проходит три стадии: стадия разгона конвекции, стадия снятия перегрева и стадия ползущего течения. Из анализа результатов численного моделирования следует, что в тонком пограничном слое возникает нисходящее течение, а в центре – восходящее. Но при движении против градиента плотности, связанного с температурной стратификацией, при значениях Pr<1 (жидкие металлы), скорость и температура осциллируют с безразмерной частотой Брэнта-Вяйсяля

$$\omega = \sqrt{Ra\frac{\partial\theta}{\partial\eta_2}} \ .$$

В центре области периодически появляются вихревые структуры, которые способствуют перемешиванию среды. С ростом вязкости среды при значениях Pr=1 (газы), Pr=10 (вода) скорости течения уменьшаются, осцилляции становятся менее заметными, а вихревые структуры не появляются. Подсчеты показывают, что для реальных перегревов и для жидкой стали, и для воды частоты колебаний лежат в пределах от 0.1 до 10 Герц, что соответствует инфразвуку.

На стадии ползущего течения решение задачи обнаруживает характерную особенность квазистационарного решения. Поля температур, выраженных по отношению к максимальной температуре области (верхняя центральная точка), практически не зависят от чисел Прандтля и Рэлея и проявляют подобие (автомодельность) (рис.1).



а б в г д

Рис.1 Квазистационарные (автомодельные) поля температур в прямоугольной области с верхней теплоизоляцией.

Относительное среднеквадратичное отклонение температуры ε при этом зависит от чисел Прандтля и Рэлея и существенно уменьшается для жидких металлов. Так, в случае

а) Pr=0.2 (жидкие металлы), Ra=0 (отсутствие конвекции), ε=0.62;

б) Pr=0.2 (жидкие металлы), $Ra=2*10^5$, ε=0.35;

в) Pr=0.2 (жидкие металлы), $Ra=2*10^6$, ε=0.28;

г) Pr=1 (газы), $Ra=2*10^5$, ε=0.38;

д) Pr=10 (вода), $Ra=2*10^5$, ε=0.43.

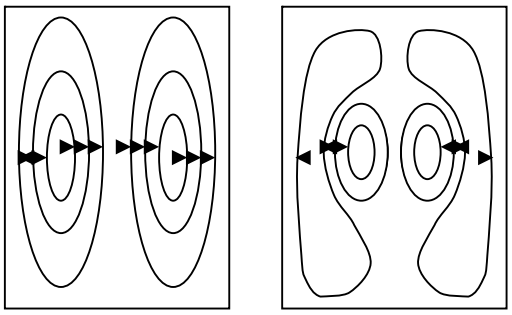
Как видно, в затухающем режиме эффективность перемешивания при естественной тепловой конвекции в 1,5-2 раза выше, чем для неподвижного металла. Увеличение числа Рэлея при одинаковом числе Прандтля на порядок также способствует выравниванию температуры в исследуемом объеме. Наоборот, увеличение числа Прандтля при одинаковом числе Рэлея создает достаточно большую неоднородность нагрева слоя.

ОСОБЕННОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

К классу стационарных решений можно отнести решения задач о естественной тепловой конвекции в области с подогреваемой внешней границей и о вынужденной конвекции с внутренними источниками тепла. В качестве примера такой задачи рассмотрим вынужденную конвекцию проводящей среды в скрещенных электрическом и магнитном полях. Конвекция возникает благодаря сильной зависимости проводимости среды от температуры аналогично формуле (4). Температурный градиент поддерживается Джоулевыми ис-

точниками тепла, что дает возможность осуществить стационарный режим конвекции. Система уравнений движения, неразрывности и теплопроводности (1-3) записывается в безындукционном приближении с учетом Амперовских сил и Джоулевых источников тепла [5].. Начальные условия для температуры варьируются, граничные условия - теплоотвод излучением и теплоотдачей.

Результаты расчета показывают, что в области формируются вихревые образования, интенсивность которых зависит от размеров области и физических параметров среды. У стенки области образуется пограничный слой, подобно естественной тепловой конвекции. Разогрев слоя и эволюция течения происходит до определенного момента времени, затем процесс можно считать установившимся. Полученный при этом стационарный режим конвекции характеризуется симметричным 2-ячеистым течением с температурной неоднородностью, соответствующему значению ε=0.18. Поскольку анализ устойчивости 2-ячеистого режима стационарной конвекции аналитическим методом затруднен, были предприняты попытки численного исследования устойчивости под влиянием начальных температурных условий, локального и интегрального импульсного воздействия на температурное поле. При определенном воздействии в процессе разгона и в установившемся режиме поля течения и температур видоизменяется, и стационарный режим характеризуется симметричным 4-ячеистым течением с определенным режимом. Таким образом, в зависимости от параметров воздействия и характеристик среды , задача имеет стационарное решение с двумя симметричными вихрями в сечении канала (рис.2, а), которое получило название двухъячеистой структуры течения. Попытка численного исследования устойчивости указанной структуры с помощью локальных возмущений привела к обнаружению нового стационарного решения в виде четырехъячеистой структуры (рис.2, б).



а б

Рис.2 Различные конвективные структуры вынужденных течений в осесимметричной области:

Итак, решение системы обнаруживает бифуркацию: при определенном импульсном температурном воздействии либо в процессе разгона, либо в установившемся режиме, поля скоростей и температур видоизменяются и стационарный 2-ячеистый режим преобразуется к симметричному 4-ячеистому течению. При этом существенно возрастает интенсивность перемешивания, оцениваемая величиной удельной кинетической энергии, а температурная неоднородность снижается (ε уменьшается от 0.18 до 0.13).

Становятся очевидными преимущества многоячеистой структуры течения. Как показали численные эксперименты, двухъячеистая структура является наиболее устойчивой, что соответствует минимуму удельной кинетической энергии жидкости.

Переход к четырехъячеистой структуре становится более вероятным при мощном импульсном локальном воздействии на среду вблизи центра ячеек. Проведенные натурные эксперименты подтвердили возможность образования в рассматриваемых условиях как двух-, так и четырехъячеистых структур.

Численным путем установлено: стационарному состоянию соответствуют два решения, переход от 2-х к 4-х ячеистому режиму возможен благодаря импульсному температурному воздействию.

Существование других стационарных решений системы пока не обнаружено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании численных расчетов установлено, что решения системы уравнений для свободной и вынужденной конвекции в ограниченном объеме могут быть приведены к следующим видам: нестационарная естественная конвекция, квазистационарная естественная конвекция, стационарная естественная и вынужденная конвекция.

В случае нестационарной естественной тепловой конвекции в жидких металлах при движении в направлении градиента плотности возникают периодические вихревые

структуры, способствующие выравниванию температур в области. При этом параметры течения испытывают осцилляции (изменения) с инфразвуковой частотой. При воздействии вибрацией возможно появление резонанса, что будет способствовать дополнительному вихреобразованию и перемешиванию расплавов.

Квазистационарность решения задачи о естественной тепловой конвекции проявляется на стадии затухания течения. При этом существует автомодельное решение, слабо зависящее от чисел Прандтля и Рэлея, и имеющее универсальный вид.

Анализ стационарных решений задачи о вынужденной конвекции в электромагнитном поле показал, что на эффективность перемешивания наиболее существенное влияние оказывает структура течения.

Установлено, что решение системы обнаруживает бифуркацию: стационарному состоянию соответствуют два решения, переход от 2-х к 4-х ячеистому режиму возможен благодаря импульсному температурному воздействию. При этом режим перемешивания оказывается более интенсивным, температурная неоднородность снижается, что может быть использовано в технологических установках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефимов В.А., Эльдарханов А.С. Физические методы воздействия на процессы затвердевания сплавов. - М.: Металлургия, 1995. - 272 с.
2. Ефимов В.А., Эльдарханов А.С. Современные технологии разливки и кристаллизации сплавов. - М.: Машиностроение, 1998. - 360 с.: илл.
3. Жук В.И. Анализ влияния теплового, гидродинамического и электромагнитного воздействия на интенсивность конвекции в кристаллизующемся расплаве методами теории пограничного слоя. // Вестник Приазов. гос. техн. ун-та: Сб. науч. тр. Мариуполь, 1997. – Вып. 3.- С.57-61.
4. Жук В.И., Хаджинов А.С. Численное моделирование ячеистых структур при электромагнитном перемешивании проводящей среды. Тезисы докладов 13 Рижского совещания по магнитной гидродинамике, Саласпилс, 1990, т.1, с.111-112
5. Жук В.И. Компьютерное моделирование теплопереноса, диффузии и движения частиц в затвердевающем расплаве. // Вестник Приазов. гос. тех. ун-та: Сб. науч. тр. - Мариуполь, 2000. – Вып.9. –С.285-291.