УДК 536.242

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ И ДИФФУЗИОННЫХ ПОТОКОВ НА ПРОНИЦАЕМОЙ СТЕНКЕ ПРИ ИНОРОДНОМ ВДУВЕ В ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Волчков Э.П., Макаров М.С., Макарова С.Н.

Институт теплофизики им.С.С.Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия

Гранты РФФИ №11-08-00365а и Президента РФ НШ-4349.2010.8, МК-985.2010.8

АННОТАЦИЯ

В работе рассматриваются особенности изменения тепловых и диффузионных потоков на проницаемой стенке при вдуве инородного газа в пограничный слой. Процессы диффузии рассматриваются в приближении бинарной газовой смеси. Показано, что вдув газа приводит к немонотонному изменению теплового и диффузионного потоков на стенке в отличие от напряжения трения, которое с увеличением вдува всегда монотонно снижается. На основе интегральных соотношений теории пограничного слоя получены простые аналитические выражения, позволяющие определить условия максимума теплового и диффузионного потоков, как при ламинарном, так и при турбулентном режимах течения. Справедливость полученных аналитических соотношений подтверждена результатами численного моделирования.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования динамики течения и тепломассообмена на проницаемых поверхностях [1, 2, 3] показали, что с ростом параметра проницаемости, как при ламинарном, так и при турбулентном режиме течения, происходит монотонное снижение относительных функций трения Ψ, тепло - Ψ_T и массообмена Ψ_D вплоть до нуля при достижении критического вдува. Поскольку принято считать, что относительные функции трения, тепло- и массообмена отличаются от искомых величин (напряжения трения, теплового потока и диффузионного потока) только масштабом, полученные закономерности обычно распространяются и на их поведение. Однако, как показано в работах [4, 5], такое поведение теплового потока не является универсальным. Для безградиентного ламинарного пограничного слоя было получено, что при постоянном параметре проницаемости по длине пластины $b = \text{const}$ тепловой поток на проницаемой стенке в зависимости от интенсивности вдува будет иметь максимум. Существование экстремума можно наглядно показать, используя баланс теплоты на поверхности теплообмена:

$$q_w = \left(-\lambda\, \partial T/\partial y\right)_w = j_w c_p'\left(T' - T_w\right). \qquad (1)$$

Известно, что при постоянном по длине параметре проницаемости стенки $b = \text{const}$ массовый поток вещества j_w является монотонно возрастающей функцией, в то время как разность температур $\Delta T = \left(T' - T_w\right)$ с увеличением вдува монотонно снижается, так как $T_w \to T'$. Из баланса (1) очевидно следует, что при определённом значении параметра проницаемости b тепловой поток q_w должен иметь максимум. При этом относительная функция теплообмена монотонно снижается с увеличением интенсивности вдува.

В работе [5] на основе балансовых соотношений были получены формулы для определения условий максимума теплового потока и его значения при ламинарном режиме течения в пограничном слое:

$$q_w^{\max} = \frac{St_0 \rho_0 u_0 c_{p0}\left(T' - T_0\right)}{\left(c_p'/c_{p0}\right)/b_T^{\max} + 1/\Psi_T^{\max}} \qquad (2)$$

$$b_T^{\max} = \frac{b_T^{кр}}{1 + \sqrt{c_p'/c_{p0} \cdot b_T^{кр}}}, \qquad (3)$$

где связь относительной функции теплообмена с тепловым параметром проницаемости принимается в виде линейной аппроксимации [6]:

$$\Psi_T = 1 - b_T / b_T^{кр} . \qquad (4)$$

Критическое значение теплового параметра проницаемости определяется по формуле:

$$b_T^{кр} = 1.86 Pr_0^{2/3} / \sqrt[3]{\overline{M}} \qquad (5)$$

где $\overline{M} = M_0 / M'$ - отношение молекулярных весов газа основного потока и вдуваемого газа.

В работах [4, 5] проанализировано изменение теплового потока на проницаемой стенке при постоянном по длине значении параметра проницаемости ($b = \text{const}$).

В настоящей работе рассматривается изменение теплового потока при постоянном по длине расходе вдуваемого газа ($j_w = \text{const}$). Также исследуется применимость соотношений (2), (3) для анализа теплообмена при турбулентном режиме течения и определяются условия максимума диффузионного потока при неизотермическом инородном вдуве. Результаты расчётов по аналитическим соотношениям сравниваются с данными численного моделирования.

Численное решение задачи получено на основе системы уравнений двумерного стационарного пограничного слоя [7] дополненной $q-\omega$ моделью турбулентности [8]. Турбулентные числа Прандтля и Шмидта принимались постоянными по сечению пограничного слоя и равными 0.9 и 0.8, соответственно.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА НА ПРОНИЦАЕМОЙ СТЕНКЕ ПРИ ПОСТОЯННОМ ПО ДЛИНЕ РАСХОДЕ ВДУВАЕМОГО ГАЗА

Из вышеприведённого анализа следует, что при постоянном по длине параметре проницаемости тепловой поток на стенке в зависимости от безразмерного комплекса $\overline{j_w}\sqrt{\text{Re}_x}$ всегда должен иметь максимум. Легко показать, что при $b = \text{const}$ в безградиентном потоке указанный комплекс может изменяться только за счёт изменения интенсивности вдува.

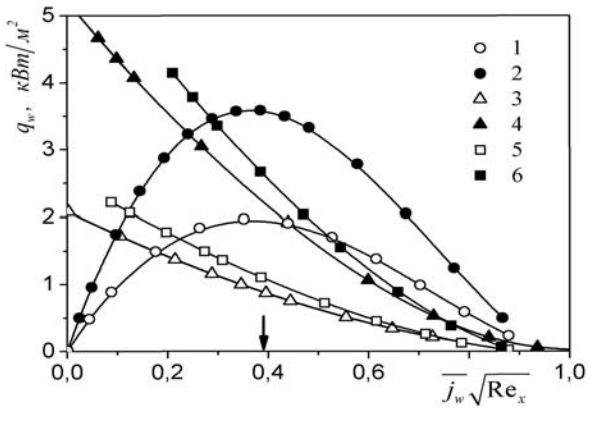

Рис.1 Тепловой поток на проницаемой стенке при однородном вдуве в ламинарный пограничный слой.

В случае постоянства расхода вдуваемого газа по длине стенки комплекс $\overline{j_w}\sqrt{\text{Re}_x}$ может изменяться как за счёт интенсивности вдува $j_w = \text{var}$, так и за счёт изменения скорости набегающего потока $u_0 = \text{var}$ или координаты рассматриваемого сечения от передней кромки пластины $x = \text{var}$. Для каждого из этих условий на рис.1 представлены результаты численного моделирования теплового потока при однородном вдуве в ламинарный пограничный слой. Все расчёты проведены при температуре основного потока $T_0 = 300K$ и температуре вдуваемого газа $T' = 400K$.

Зависимости 1 и 2 на рис.1 получены при числах Рейнольдса $\text{Re}_x = 10^4$ и $3 \cdot 10^3$, соответственно. При этом безразмерная интенсивность вдува $\overline{j_w}$ варьировалась от расчёта к расчёту в диапазоне от $0.88 \cdot 10^{-5}$ до $1.58 \cdot 10^{-2}$. Как видно, данные зависимости имеют максимум при значении комплекса $\left(\overline{j_w}\sqrt{\text{Re}_x}\right)^{\max} = 0.39$ (обозначено стрелкой), что соответствует значению теплового параметра проницаемости $b_T^{\max} = 0.66$, которое хорошо согласуется с результатами расчётов по формулам (3) и (5).

Зависимости 3 и 4 на рис.1 получены при постоянном массовом потоке вдуваемого газа $\overline{j_w} = 1.76 \cdot 10^{-3}$ и $4.39 \cdot 10^{-3}$, соответственно. При этом комплекс $\overline{j_w}\sqrt{\text{Re}_x}$ изменяется за счёт роста числа Рейнольдса по длине проницаемой стенки от передней кромки до точки оттеснения пограничного слоя. Скорость набегающего потока в этом случае сохранялась постоянной и равной 10 *м/с*. Как видно, тепловой поток с увеличением $\overline{j_w}\sqrt{\text{Re}_x}$ монотонно снижается. Из баланса теплоты на проницаемой стенке (1) следует, что монотонное снижение теплового потока обусловлено монотонным повышением температуры стенки по длине пластины.

Аналогичная картина наблюдается и в том случае, когда на одном и том же расстоянии от передней кромки пластины комплекс $\overline{j_w}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ растёт за счёт снижения скорости набегающего потока. Зависимости 5 и 6 на рис.1 получены при постоянном массовом потоке вдуваемого газа $j_w = 0.025$ и 0.06 *кг/м²с*, соответственно. Скорость основного потока изменялась в диапазоне от 1 до 100 м/с.

Проведённый анализ показывает, что в отличие от случая $b = \mathrm{const}$ при $j_w = \mathrm{const}$ зависимость теплового потока на проницаемой стенке от параметра проницаемости b или комплекса $\overline{j_w}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ может не иметь максимума. Исходя из аналоги процессов тепло- и массообмена, можно предположить, что зависимости диффузионного потока от параметра проницаемой стенки так же будут иметь подобный характер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМУМА ДИФФУЗИОННОГО ПОТОКА НА ПРОНИЦАЕМОЙ СТЕНКЕПРИ ЛАМИНАРНОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ

Определим условия максимума диффузионного потока i - ого компонента газовой смеси $J_w^{\max} = \left(-\rho D\,\partial K_i/\partial y\right)_w^{\max}$ при инородном вдуве в ламинарный пограничный слой по методике, предложенной в работе [5].

Используя баланс вещества на стенке проницаемой пластины:

$$\left(-\rho D\,\partial K_i/\partial y\right)_w = j_w\left(K_i' - \left(K_i\right)_w\right)$$

и диффузионное число Стантона:

$$St_D = \frac{\left(-\rho D\,\partial K_i/\partial y\right)_w}{\rho_0 u_0\left(\left(K_i\right)_w - \left(K_i\right)_0\right)},$$

получим следующее соотношение:

$$\overline{J_w^*} = \frac{J_w/\rho_0 u_0}{\left(K_i' - \left(K_i\right)_0\right)} = \left(\frac{\rho_0 u_0}{j_w} + \frac{1}{St_D}\right)^{-1}. \qquad (6)$$

Далее выражение (6) представим через относительную функцию массообмена $\Psi_D = St_D/St_{D0}$:

$$\overline{J_w^*}/St_{D0} = \left(1/b_D + 1/\Psi_D\right)^{-1}, \qquad (7)$$

где $b_D = j_w/\left(\rho_0 u_0 St_{D0}\right)$ – параметр проницаемости, рассчитанный по диффузионному числу Стантона при $j_w \to 0$.

В случае ламинарного режима течения относительная функция массообмена Ψ_D в первом приближении может быть описана с помощью линейной аппроксимации:

$$\Psi_D = 1 - b_D/b_D^{кр}, \qquad (8)$$

где критический диффузионный параметр проницаемости:

$$b_D^{кр} = 1.86\,Sc_0^{2/3}/\sqrt[3]{\overline{M}}. \qquad (9)$$

Из условия существования экстремума диффузионного потока $dJ_w/db_D = 0$, используя соотношения (6) и (7), для ламинарного пограничного слоя можно рассчитать параметр проницаемости, при котором диффузионный поток имеет максимум:

$$b_D^{\max} = b_D^{кр}\Big/\left(1 + \sqrt{b_D^{кр}}\right). \qquad (10)$$

Из выражения (6) с учетом того, что $K_i' = 1$, $\left(K_i\right)_0 = 0$, максимум диффузионного потока может быть определён по следующей формуле:

$$J_w^{\max} = \frac{St_{D0}\rho_0 u_0}{1/b_D^{\max} + 1/\Psi_D^{\max}}.$$

Интересно отметить то, что представленная методика расчета $b_D^{\max}$, $J_w^{\max}$ приводит практически к аналогичным решениям (2), (3), которые были получены в работе [5] для тепловой задачи, только с соответствующей заменой тепловых параметров на диффузионные.

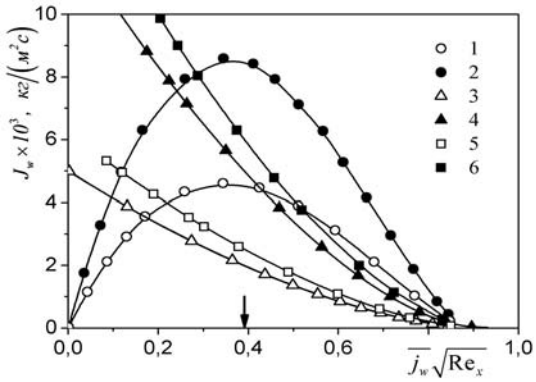

Рис.2 Диффузионный поток на проницаемой стенке при вдуве азота в ламинарный поток воздуха.

На рис.2 представлены результаты численного моделирования диффузионного потока на проницаемой стенке при вдуве азота в ламинарный поток воздуха. Массовая концентрация азота в основном потоке составляет 75%, массовая концентрация кислорода – 25%. Остальные параметры расчётов для линий 1-6 совпадают с описанными при анализе задачи теплообмена.

Из рисунка видно, что в зависимости от организации вдува, диффузионный поток на стенке, как и тепловой поток (см. рис.1), может изменяться монотонно либо иметь максимум. Из аналитических соотношений (9) и (10) получено значение диффузионного параметра проницаемости $b_D^{\max} = 0.68$ соответствующее $J_w^{\max}$. Комплекс $\left(\overline{j_w}\sqrt{\mathrm{Re}_x}\right)^{\max}$ при этом равен 0.39 (на рисунке обозначено стрелкой).

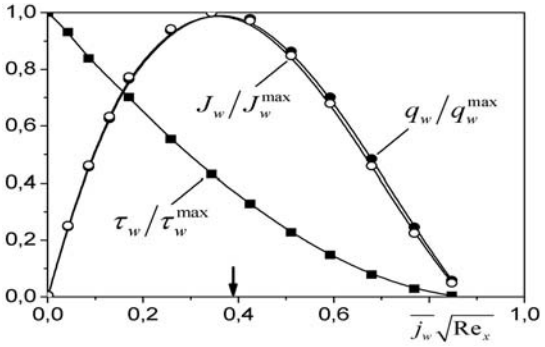

Рис.3 Зависимости безразмерного касательного напряжения, теплового и диффузионного потоков от проницаемости стенки при вдуве азота в ламинарный пограничный слой.

На рис.3 представлено сопоставление безразмерного теплового и диффузионного потоков, а также касательного напряжения трения на стенке для рассматриваемого случая при $\overline{j_w} = 0.85\cdot10^{-5}...0.85\cdot10^{-2}$, $\mathrm{Re}_x = 10^4$. Видно, что q_w и J_w достигают максимальных значений при одной и той же интенсивности вдува. Можно сказать, что при вдуве, близком к однородному, процессы тепло- и массообмена являются подобными. В отличие от теплового и диффузионного потоков касательное напряжение трения τ_w с увеличением вдува всегда монотонно снижается вплоть до нуля при достижении критического параметра проницаемости.

Вывод о равенстве значений $b_T^{\max}$ и $b_D^{\max}$ для рассматриваемых условий можно сделать также из анализа формул (3) и (10). Поскольку свойства азота и воздуха отличаются незначительно, то числа Прандтля и Шмидта практически постоянны по высоте пограничного слоя и равны 0.71 и 0.75, соответственно, при этом $b_T^{кр} \approx b_D^{кр}$. Отношение теплоёмкостей азота (вдуваемого газа) и воздуха (газа основного потока), входящее в формулу (3), близко к единице. Результаты расчётов по формулам (3), (5) и (9), (10) представлены на рис.3 в виде стрелки.

Влияние неоднородности вдува на положение максимума теплового и диффузионного потоков можно показать на примере вдува гелия в ламинарный поток азота, поскольку для таких условий числа Прандтля и Шмидта отличаются между собой в несколько раз ($\mathrm{Pr} \approx 0.7$, $Sc \approx 0.2$) и существенно изменяются по толщине пограничного слоя.

На рис.4 представлено сравнение зависимостей безразмерного теплового и диффузионного потоков от комплекса $\overline{j_w}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ для указанных условий. Расчёты проведены при изменении относительной интенсивности вдува $\overline{j_w}$ в диапазоне от $0.88\cdot10^{-5}$ до $0.44\cdot10^{-2}$. Остальные параметры течения совпадают с описанными выше при анализе максимума теплового потока. Как видно из рисунка, максимумы теплового и диффузионного потоков не совпадают. Формулы (3), (5) и (9), (10) позволяют оценить положение максимумов: $b_T^{\max} = 0.26$ и $b_D^{\max} = 0.2$, что приводит к значениям $\left(\overline{j_w}\sqrt{\mathrm{Re}_x}\right)^{\max}$ равным 0.15 и 0.28, соответственно (на рис.4 показано стрелками).

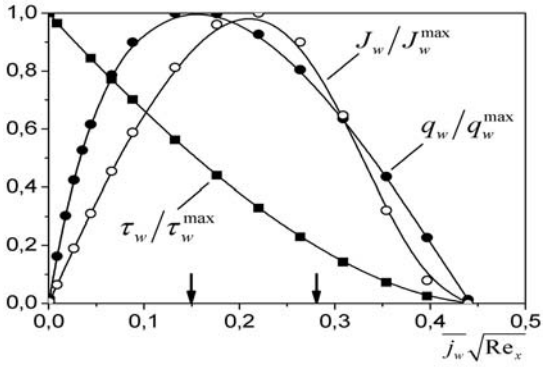

Рис.4 Влияние неоднородности вдува на положение максимума теплового и диффузионного потоков при вдуве гелия в ламинарный поток азота.

МЕТОДИКА РАСЧЁТА МАКСИМУМОВ ТЕПЛОВОГО И ДИФФУЗИОННОГО ПОТОКА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ

По аналогии с вышеизложенным можно получить значения максимумов теплового $q_w^{\max}$ и диффузионного $J_w^{\max}$ потоков и соответствующие им значения теплового $b_T^{\max}$ и диффузионного $b_D^{\max}$ параметров проницаемости при вдуве газа в турбулентный пограничный слой. В этом

случае при определении $b_T^{\max}$ и $b_D^{\max}$ необходимо использовать относительные функций тепло - Ψ_T и массообмена Ψ_D для турбулентного режима течения.

Согласно асимптотической теории Кутателадзе - Леонтьева [3, 9] зависимости Ψ_T и Ψ_D являются степенными функциями от параметра проницаемости. К сожалению, строго следуя теории, не удаётся получить простых аналитических решений для $b_T^{\max}$ и $b_D^{\max}$, как в случае ламинарного режима течения. Поэтому, в первом приближении, для определения Ψ_T и Ψ_D воспользуемся линейными зависимостями (4) и (8), а критические значения теплового и диффузионного параметров проницаемости определим по формулам для турбулентного пограничного слоя [10]:

$$b_T^{кр} = b^{кр}\,\mathrm{Pr}_0^{0.6}; \qquad (11)$$

$$b_D^{кр} = b^{кр}\,Sc_0^{0.6}. \qquad (12)$$

По данным работы [11] при инородном вдуве критический динамический параметр проницаемости, входящий в соотношения (11) и (12), определяется следующим образом:

при $\overline{M} < 1$

$$b^{кр} = \frac{1}{1-\overline{M}}\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-\overline{M}}}{1-\sqrt{1-\overline{M}}}\right)^2;$$

при $\overline{M} < 1$

$$b^{кр} = \frac{1}{\overline{M}-1}\left(\arccos\frac{2-\overline{M}}{\overline{M}}\right)^2. \qquad (13)$$

Упрощённая таким образом методика расчёта $b_T^{\max}$ и $b_D^{\max}$ при турбулентном режиме течения приводит к закономерностям (3) и (10), которые были получены ранее для ламинарного режима течения, с той лишь разницей, что критические параметры проницаемости b_T^{kp} и b_D^{kp} необходимо определять по формулам (11) - (13).

На рис.5 приводится сравнение зависимостей теплового потока от теплового параметра проницаемости при ламинарном и турбулентном режиме течения. Данные численного моделирования, представленные для ламинарного пограничного слоя, соответствуют зависимостям 1, 3 и 5 на рис.1. Как видно, в турбулентном пограничном слое при постоянном числе Рейнольдса $\mathrm{Re}_x = 10^6$ и различных значениях $\overline{j_w}$ в диапазоне от $0.88\cdot10^{-5}$ до $0.79\cdot10^{-2}$ зависимость $q_w = f(b_T)$, также как и в ламинарном, имеет максимум (линия 4). Расчёт по формуле (3) с учётом (11), позволяет определить положение этого максимума достаточно точно. Полученное значение $b_T^{\max}$ равно 1.16. При однородном вдуве значение критического динамического параметра проницаемости b_T^{kp}=3.5 [3].

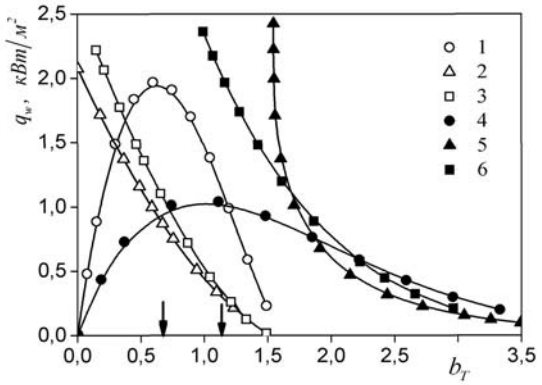

Рис.5 Тепловой поток на проницаемой стенке при однородном вдуве в ламинарный и турбулентный пограничный слой.

Монотонно убывающая функция 5 (см. рис.5) получена при постоянном массовом потоке вдуваемого газа $\overline{j_w} = 4.39\cdot10^{-3}$ за счёт роста числа Рейнольдса по длине пластины от точки ламинарно-турбулентного перехода x_0 до точки оттеснения пограничного слоя. Минимальное значение теплового параметра проницаемости b_T ограничено наличием начального непроницаемого участка при числах Рейнольдса от 0 до $4\cdot10^5$, необходимого для получения развитого турбулентного пограничного слоя на проницаемой части стенки. Аналогичная зависимость получена и при изменении числа Рейнольдса за счёт изменения скорости основного потока u_0 в диапазоне от 7 до 27.5 *м/с* при постоянном J_w=0.06 *кг/м²с* (линия 6). В этом случае тепловой параметр проницаемости с увеличением скорости потока стремится к нулю даже при наличии начального непроницаемого участка.

Как видно из представленных на рис.5 данных, поведение теплового потока на проницаемой стенке при турбулентном режиме течения качественно совпадает с его поведением при ламинарном режиме течения и зависит от организации вдува.

На рис.6 представлены результаты численного моделирования тепло- и массообмена в турбулентном пограничном слое при инородном вдуве гелия. Расчёты проведены при изменении относительной интенсивности вдува $\overline{j_w}$ в диапазоне от $0.88\cdot10^{-5}$ до $0.18\cdot10^{-2}$ при одинаковом значении числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_x = 10^6$. Несмо-

тря на то, что турбулентные числа Прандтля и Шмидта близки ($\Pr_t = 0.9;\ Sc_t = 0.8$), имеется заметное отличие в положении максимумов q_w и J_w. Расчёт по формулам (3), (10) с учётом (11), (12), (13) также позволяет оценить положение максимумов теплового и диффузионного потоков: $b_T^{\max} = 0.25$, $b_D^{\max} = 0.22$ (на рис.6. стрелками обозначены соответствующие значения динамического параметра проницаемости $b^{\max} = 0.31$ и 0.59).

Результаты, представленные на рис.5 и 6, показывают, что соотношения (3) и (10), позволяющие оценить положение максимумов теплового и диффузионных потоков, применимы как при ламинарном, так и при турбулентном режиме течения.

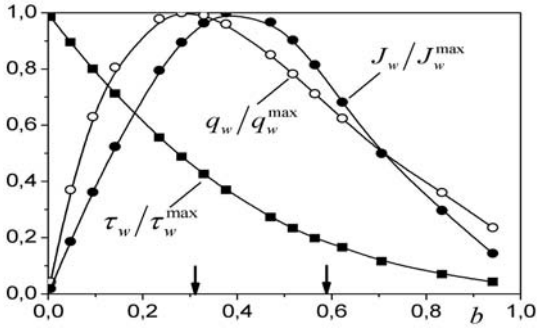

Рис.6 Влияние неоднородности вдува на положение максимума теплового и диффузионного потоков при вдуве гелия в турбулентный поток азота.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что при постоянном по длине расходе вдуваемого газа тепловой и диффузионный потоки на проницаемой стенке в зависимости от интенсивности вдува могут монотонно снижаться или иметь максимум, что зависит от организации вдува. При этом касательное напряжение трения с увеличением вдува всегда монотонно снижается.

Предложена методика расчёта максимума диффузионного потока на проницаемой стенке при ламинарном и турбулентном режимах течения. Показано, что при одинаковых числах Прандтля и Шмидта и близких значениях теплоёмкостей вдуваемого газа и основного течения, тепловой и диффузионный потоки на стенке достигают максимума при одном и том же значении параметра проницаемости.

Показана применимость соотношений, полученных в данной работе, для расчёта значений максимума теплового и диффузионного потоков при турбулентном режиме течения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. - М.: Атомиздат, 1979. - 416с.
2. Теория тепломассообмена: Учебник для технических университетов и вузов / Под ред. А.И. Леонтьева. - М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. - 683с.
3. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. - М.: Энергия, 1972. - 344с.
4. Волчков Э.П., Лукашов В.В., Дунаев Д.С. О влиянии граничных условий на тепломассообмен в пограничном слое // Труды III Российской национальной конференции по теплообмену. - М.: Издательство МЭИ, 2002. - Т. 2. - С. 103 - 105.
5. Volchkov E.P. Concerning the heat and mass transfer features on permeable surfaces // Int. J. Heat and mass transfer. - 2006. - V. 49. - P. 755 – 762.
6. Gross J.F. A review of binary laminar boundary layer characteristics / Hartnett J.P., Masson D.J., Gazley C. // Int. J. Heat Mass Transfer. - 1961. - V. 3. - P. 198 – 221.
7. Андерсон Д., Теннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. - М.: Мир, 1990. -Т.2. - 392 с.
8. Gerlinger P., Bruggemann D. An implicit scheme for the compressible Navier-Stokes equations with low-Reynolds-number turbulence closure // J. of Fluids engineering. - 1998. - V. 120. - No 6. - P. 257 – 262.
9. Кутателадзе С.С., Леонтьев А.И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. - Новосибирск: Издательство СО АН СССР, 1962. - 180с.
10. Волчков Э.П., Лебедев В.П. Тепломассообмен в пристенных течениях: Учебник. - Новосибирск: Издательство НГТУ, 2003. - 244с.
11. Ерошенко В.М., Зайчик Л.И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. - М.: Наука, 1984. - 276 с.