ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУР И КОНЦЕНТРАЦИЙ ПРИ ГЛУБИННОМ ЗАХОРОНЕНИИ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ РАДИОАКТИВНЫХ РАСТВОРОВ

Филиппов А.И., Михайлов П.Н., Гюнтер Д.А., Иванов Д.В.

Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Стерлитамак, Россия

Одним из способов утилизации жидких радиоактивных отходов является их закачка в стабильные геологические формации, что позволяет минимизировать вредное радиационное воздействие на биосферу. Данный способ захоронения радиоактивных веществ осуществляется на территории России уже более 45 лет, в течение которого в подземные хранилища изолировались опасные радиоизотопы [1]. В виду большой экологической опасности необходимо создание надежных математических методов прогнозирования распространения радиоактивных примесей при захоронении в глубокозалегающих горизонтах, что приводит к решению краевых задач конвективной диффузии в пористых средах.

Задача о распространении радиоактивных примесей в пористом пласте является фундаментальной для подземного захоронения радиоактивных отходов. Соответствующие задачи обладают большим разнообразием, и их решение зачастую сопряжено со значительными трудностями. Это обусловлено рядом объективных причин. К их числу относится, например, необходимость учета диффузионного взаимодействия пласта с покрывающими и подстилающими породами, поскольку в соответствии с рекомендациями МАГАТЭ подземные захоронения должны сохранять целостность на протяжении десятков тысяч лет. В силу этого даже простейшая задача для одного изотопа должна рассматриваться минимально в трехслойной постановке, что значительно усложняет проведение расчетов. Кроме того, для таких промежутков времени окружающие породы нельзя считать абсолютно непроницаемыми, поскольку геологические движения неизбежно приводят к деформации пластов и разрушению их структуры.

Следующий усложняющий фактор – необходимость раздельного учета радиоактивных компонент раствора с существенными различными сорбционными свойствами. Радионуклидный состав жидких отходов специфичен для каждой категории и представлен изотопами стронция, рутения, цезия, церия, прометия и рядом других. Распадаясь, они, как правило, образуют другие радиоактивные нуклиды, которые, в зависимости от периода полураспада и выделяющейся при этом энергии, дают ощутимый вклад в общее температурное поле пласта – коллектора. Для прогнозирования предпосылки аварийной ситуации – разогрева геологической среды, вмещающей радиоактивные отходы, важно знать поля концентраций дочерних радионуклидов. Математическая модель таких процессов приводит к соответствующему количеству трехслойных задач сопряжения, равному числу всех материнских и дочерних компонент.

На первый взгляд, даже простейшая численная модель, описывающая пространственно-временные распределения диффузионно-конвективных полей радиоактивных растворов, требует применения мощных компьютеров. Тем не менее, многие важные характеристики процесса многокомпонентной закачки в многослойную среду могут быть исследованы на основе аналитических моделей, построенных на применении асимптотических методов, в частности, «точных в среднем» решений [2].

Нами реализована методика расчетов, основанная на применении асимптотического разложения по формальному параметру. Показано, что нулевое приближение соответствует осредненным по сечению пласта значениям концентраций. Первое приближение найдено с учетом условия равенства нулю осредненных значений остаточного члена асимптотического разложения, поэтому оно названо «точным в среднем» асимптотическим решением [2]. Указанные свойства найденных приближений определяют успешность их использования для реальных расчетов. Относительная простота аналитических выражений позволяет осуществлять исследования полей практически для любого состава раствора с небольшими затратами времени ЭВМ.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МАССОПЕРЕНОСА.

На рис.1 представлена геометрия задачи в цилиндрической системе координат, ось z_{d} которой совпадает с осью скважины. Среда представлена тремя областями с плоскими границами раздела $z_{\mathrm{d}} = \pm h$. Закачка примесей в область $-h < z_{\mathrm{d}} < h$ производится из скважины радиуса r_0, покрывающий и подстилающий пласты считаются непроницаемыми; средняя область толщины $2h$ является пористой; все пласты считаются однородными и анизотропными по диффузионным свойствам.

В поступающей жидкости в скважине $r \le r_0$

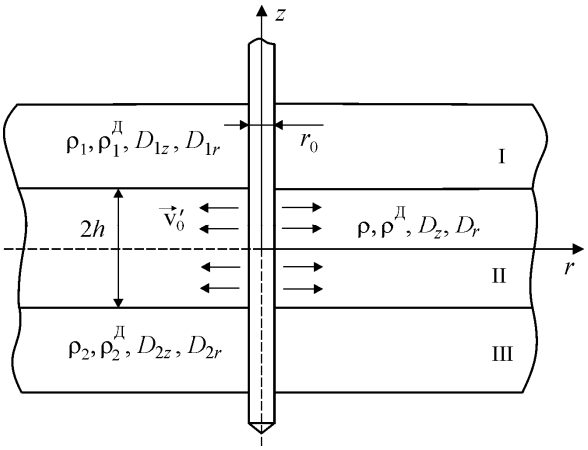

Рис.1. Геометрия задачи массопереноса: I – покрывающий, II – пористый и III – подстилающий пласты

поддерживается постоянной концентрация примеси ρ_0 материнского радионуклида. Концентрация загрязнителя в пласте изменяется за счет конвективного переноса вдоль направления r, диффузии вдоль r, z и источников концентрации. В качестве таких источников рассматривается радиоактивный распад загрязнителя.

Математическая постановка задачи массопереноса для всех областей включает уравнения диффузии материнского загрязнителя ρ_d^M и дочерних радионуклидов ρ_d с учётом радиоактивного распада в покрывающем (1), и подстилающем (2), пластах, а также уравнения конвективной диффузии с учётом радиоактивного распада в пористом пласте (3). Условия сопряжения представляют равенства плотностей и потоков растворённого вещества на границах раздела пластов (4), (5). Плотность загрязнителя в скважине, радиус которой мы считаем бесконечно малым по сравнению с расстояниями до точки наблюдения, равна ρ_0 – для дочернего и ρ_0^M – для материнского радионуклида. Полагаем, что в начальный момент времени плотность материнского и дочернего загрязнителей равна нулю (7). Кроме того, на бесконечности выполняются условия регулярности (8).

$$\frac{\partial \rho_{1d}}{\partial \tau} - D_{1z}\frac{\partial^2 \rho_{1di}}{\partial z_d^2} - D_{1r}\frac{1}{r_d}\frac{\partial}{\partial r_d}\left(r_d\frac{\partial \rho_{1d}}{\partial r_d}\right) = \alpha^M \rho_{1d}^M - \alpha\rho_{1d}, \quad \tau > 0, \quad r_d > 0, \quad z_d > h \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho_{2d}}{\partial \tau} - D_{2z}\frac{\partial^2 \rho_{2d}}{\partial z_d^2} - D_{2r}\frac{1}{r_d}\frac{\partial}{\partial r_d}\left(r_d\frac{\partial \rho_{2d}}{\partial r_d}\right) = \alpha^M \rho_{2d}^M - \alpha\rho_{2d}, \quad \tau > 0, \quad r_d > 0, \quad z_d < -h \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho_d}{\partial \tau} - D_z\frac{\partial^2 \rho_d}{\partial z_d^2} - D_r\frac{1}{r_d}\frac{\partial}{\partial r_d}\left(r_d\frac{\partial \rho_d}{\partial r_d}\right) + \frac{v_0' r_0}{r_d}\frac{\partial \rho_d}{\partial r_d} = \alpha^M \rho_d^M - \alpha\rho_d, \ \tau > 0, \quad r_d > 0, \quad |z_d| < h \tag{3}$$

$$\rho_d\big|_{z_d=h} = \rho_{1d}\big|_{z_d=h}, \ \rho_d\big|_{z_d=-h} = \rho_{2d}\big|_{z_d=-h} \tag{4}$$

$$D_z\frac{\partial \rho_d}{\partial z_d}\bigg|_{z_d=h} = D_{1z}\frac{\partial \rho_{1d}}{\partial z_d}\bigg|_{z_d=h}, \ D_z\frac{\partial \rho_d}{\partial z_d}\bigg|_{z_d=-h} = D_{2z}\frac{\partial \rho_{2d}}{\partial z_d}\bigg|_{z_d=-h} \tag{5}$$

$$\rho_d\big|_{t=0} = 0, \ \rho_{1d}\big|_{t=0} = 0, \ \rho_{2d}\big|_{t=0} = 0 \tag{7}$$

$$\rho_d\big|_{r_d\to+\infty} = 0, \ \rho_{1d}\big|_{r_d+z_d\to+\infty} = 0, \ \rho_{2d}\big|_{r_d+|z_d|\to+\infty} = 0 \tag{8}$$

При проведении расчетов для радиоактивного семейства задачу (1) – (8) необходимо решать для каждого радионуклида, причем для материнских изотопов в задаче достаточно положить $\alpha^M = 0$. Результирующая плотность радиоактивных веществ определяется как сумма решений задач для каждого из радионуклидов. Необходимость решения большого количества связанных задач затрудняет конечно-разностные расчеты концентрационных полей. Далее перейдём к безразмерным переменным (9), а также введем аналог параметра Пекле, выраженный через скорость фильтрации жидкости в пористом пласте (10).

Здесь где ρ_0^M – плотность материнского радионуклида при $r = 0$, v_0 – скорость фильтрации на расстоянии r_0 от оси скважины; m – пористость породы пласта-коллектора, $K_Г$ – коэффициент Генри (изотерма сорбции) дочернего изотопа.

$$\rho = \frac{\rho_d}{\rho_0}, \quad \rho_1 = \frac{\rho_{1d}}{\rho_0}, \quad \rho_2 = \frac{\rho_{2d}}{\rho_0}, \quad r = \frac{r_d}{h}, \quad z = \frac{z_d}{h}, \quad t = \frac{D_{1z}\tau}{h^2}, \quad \mathrm{Ad}^M = \frac{\alpha^M h^2}{D_{1z}},$$
$$\mathrm{Ad} = \frac{\alpha h^2}{D_{1z}}, \quad \omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_0^M}, \quad {}^2_1D = \frac{D_{2z}}{D_{1z}}, \quad {}^0_1D = \frac{D_z}{D_{1z}}, \quad {}^0_2D = \frac{D_z}{D_{2z}}, \quad {}^i_jD = \frac{1}{{}^j_iD}, \tag{9}$$

$$\mathrm{Pd} = \frac{\mathrm{v}_0 r_0}{D_{1z}\left((1-m)K_\Gamma + m\right)}, \tag{10}$$

Оценим третье и четвертое слагаемое в уравнении (3)

$$\frac{\frac{D_r}{D_{1z}}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)}{\frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r}} \approx \frac{D_r \frac{\tilde{\rho}}{R^2}}{D_{1z}\mathrm{Pd}\frac{\tilde{\rho}}{R^2}} \approx \frac{D_r}{\mathrm{v}_0 r_0} = \frac{D_r}{D_{1z}\mathrm{Pd}} \approx \frac{1}{\mathrm{Pd}} << 1$$

поскольку при объемах закачки ~500 м^3/сутки число Pd оказывается порядка 10^5, и вклад конвективного переноса становится подавляющим над радиальной диффузией. Это обстоятельство позволяет пренебречь в уравнении (3) слагаемым, описывающим радиальную диффузию. Для простоты будем пренебрегать также соответствующими слагаемыми в уравнениях для «кровли» и «подошвы».

Постановка задачи в безразмерном виде представится как:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z^2} = \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}\rho_1, \qquad t>0, \quad r>0, \quad z>1 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - {}^{2}_{1}D\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial z^2} = \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}\rho_2, \qquad t>0, \quad r>0, \quad z<-1 \tag{12}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - {}^{0}_{1}D\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} = \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}\rho, \quad t>0, \quad r>0, \quad |z|<1 \tag{13}$$

$$\rho\big|_{t=0} = 0,\ \rho_1\big|_{t=0} = 0,\ \rho_2\big|_{t=0} = 0 \tag{14}$$

$$\rho\big|_{r=0} = \omega_0, \qquad \rho\big|_{z=1} = \rho_1\big|_{z=1}, \qquad \rho\big|_{z=-1} = \rho_2\big|_{z=-1} \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial z}\right|_{z=1} = {}^{1}_{0}D\left.\frac{\partial \rho_1}{\partial z}\right|_{z=1}, \qquad \left.\frac{\partial \rho}{\partial z}\right|_{z=-1} = {}^{2}_{0}D\left.\frac{\partial \rho_2}{\partial z}\right|_{z=-1} \tag{16}$$

$$\rho\big|_{r\to\infty} = 0, \qquad \rho_1\big|_{r+z\to\infty} = 0, \qquad \rho_2\big|_{r+|z|\to\infty} = 0 \tag{17}$$

Применительно к материнским загрязнителям задача (11) – (17) решена в работе [2], поэтому плотность ρ^{M} во всех пластах считается известной.

РАЗЛОЖЕНИЕ ЗАДАЧИ МАССОПЕРЕНОСА ПО АСИМПТОТИЧЕСКОМУ ПАРАМЕТРУ.

Рассмотрим задачу, получающуюся введением формального асимптотического параметра ε путем формальной замены коэффициента диффузии D_z на D_z/ε. В соответствии с принятыми обозначениями это соответствует заменам ${}^{1}_{0}D = \varepsilon\,{}^{1}_{0}D$, ${}^{2}_{0}D = \varepsilon\,{}^{2}_{0}D$. Задача (11) – (17) является, таким образом, частным случаем более общей параметризированной задачи, содержащей параметр асимптотического разложения как в уравнении для пласта, так и в условиях сопряжения

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial z^2} = \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho_1^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}\rho_1, \qquad t>0, \quad r>0, \quad z>1 \tag{18}$$

$$\varepsilon\frac{\partial \rho}{\partial t} - {}^{0}_{1}D\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \varepsilon\frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{\partial \rho}{\partial r} = \varepsilon\left(\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}\rho\right), \qquad t>0, \quad r>0, \quad |z|<1 \tag{19}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - {}^{2}_{1}D\frac{\partial^2 \rho_2}{\partial z^2} = \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho_2^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}\rho_2, \qquad t>0, \quad r>0, \quad z<-1 \tag{20}$$

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{z=1} = {}_0^1D\,\varepsilon\left.\frac{\partial\rho_1}{\partial z}\right|_{z=1},\ \left.\frac{\partial\rho}{\partial z}\right|_{z=-1} = {}_0^2D\,\varepsilon\left.\frac{\partial\rho_2}{\partial z}\right|_{z=-1} \tag{21}$$

$$\rho\big|_{r=0} = \omega_0,\ \rho\big|_{z=1} = \rho_1\big|_{z=1},\quad \rho\big|_{z=-1} = \rho_2\big|_{z=-1},\ \rho\big|_{t=0} = 0,\ \rho_1\big|_{t=0} = 0,\ \rho_2\big|_{t=0} = 0 \tag{22}$$

$$\rho^{Д}\big|_{r\to\infty} = 0,\qquad \rho_1^{Д}\big|_{r+z\to\infty} = 0,\qquad \rho_2^{Д}\big|_{r+|z|\to\infty} = 0 \tag{23}$$

Будем искать решение задачи (18) – (23), разлагая функцию плотности материнского ρ^{M} и дочернего ρ радионуклида каждой из областей в ряд по параметру ε. Задачи нахождения плотности материнского и дочернего радионуклида являются взаимосвязанными, поэтому разложение плотности для материнского и дочернего загрязнителя происходит одинаковым образом (24). Здесь $\Theta^{(n)}, \Theta_1^{(n)}, \Theta_2^{(n)}$ – остаточные члены разложения. Подставив выражения (24) в (18) – (23) и сгруппировав слагаемые по степеням параметра разложения ε, получим выражения (25) – (32):

$$\rho = \rho^{(0)} + \sum_{j=1}^{n}\varepsilon\rho^{(j)} + \Theta^{(n)},\ \rho_1 = \rho_1^{(0)} + \sum_{j=1}^{n}\varepsilon\rho_1^{(j)} + \Theta_1^{(n)},\ \rho_2 = \rho_2^{(0)} + \sum_{j=1}^{n}\varepsilon\rho_2^{(j)} + \Theta_2^{(n)} \tag{24}$$

$$\left(\frac{\partial\rho_1^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial^2\rho_1^{(0)}}{\partial z^2} + \mathrm{Ad}\,\rho_1^{(0)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho_1^{\mathrm{M}(0)}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial\rho_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2\rho_1^{(1)}}{\partial z^2} + \mathrm{Ad}\,\rho_1^{(1)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho_1^{\mathrm{M}(1)}\right) + \ldots = 0, \tag{25}$$
$$t > 0,\quad r > 0,\quad z > 1,$$

$$\left(\frac{\partial\rho_2^{(0)}}{\partial t} - {}_1^2D\frac{\partial^2\rho_2^{(0)}}{\partial z^2} + \mathrm{Ad}\,\rho_2^{(0)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho_2^{\mathrm{M}(0)}\right) +$$
$$+\varepsilon\left(\frac{\partial\rho_2^{(1)}}{\partial t} - {}_1^2D\frac{\partial^2\rho_2^{(1)}}{\partial z^2} + \mathrm{Ad}\,\rho_2^{(1)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho_2^{\mathrm{M}(1)}\right) + \ldots = 0,\qquad t > 0,\ r > 0,\ z < -1, \tag{26}$$

$$-{}_1^0D\frac{\partial^2\rho^{(0)}}{\partial z^2} + \varepsilon\left(\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial t} - {}_1^0D\frac{\partial^2\rho^{(1)}}{\partial z^2} + \frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial r} + \mathrm{Ad}\,\rho^{(0)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(0)}\right) +$$
$$+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial t} - {}_1^0D\frac{\partial^2\rho^{(2)}}{\partial z^2} + \frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial r} + \mathrm{Ad}\,\rho^{(1)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(1)}\right) + \ldots = 0,\ t > 0,\ r > 0,\ |z| < 1, \tag{27}$$

$$\left.\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=1} + \varepsilon\left(\left.\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=1} - {}_0^1D\left.\frac{\partial\rho_1^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=1}\right) + \ldots = 0,\ \left.\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=-1} + \varepsilon\left(\left.\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial z}\right|_{z=-1} - {}_0^2D\left.\frac{\partial\rho_2^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=-1}\right) + \ldots = 0, \tag{28}$$

$$\left(\rho^{(0)} + \varepsilon\rho^{(1)} + \ldots\right)\big|_{z=1} = \left(\rho_1^{(0)} + \varepsilon\rho_1^{(0)} + \ldots\right)\big|_{z=1},\ \left(\rho^{(0)} + \varepsilon\rho^{(1)} + \ldots\right)\big|_{z=-1} = \left(\rho_2^{(0)} + \varepsilon\rho_2^{(0)} + \ldots\right)_{z=-1} \tag{29}$$

$$\left(\rho^{(0)} + \varepsilon\rho^{(1)} + \ldots\right)\big|_{t=0} = 0\ ,\ \left(\rho_1^{(0)} + \varepsilon\rho_1^{(0)} + \ldots\right)\big|_{t=0} = 0,\ \left(\rho_2^{(0)} + \varepsilon\rho_2^{(0)} + \ldots\right)\big|_{t=0} = 0 \tag{30}$$

$$\left(\rho^{(0)} + \varepsilon\rho^{(1)} + \ldots\right)\big|_{r=0} = \omega_0 \tag{31}$$

$$\left(\rho^{(0)} + \varepsilon\rho^{(1)} + \ldots\right)\big|_{r\to+\infty} = 0,\ \left(\rho_1^{(0)} + \varepsilon\rho_1^{(0)} + \ldots\right)\big|_{r+z\to+\infty} = 0,\ \left(\rho_2^{(0)} + \varepsilon\rho_2^{(0)} + \ldots\right)\big|_{r+|z|\to+\infty} = 0. \tag{32}$$

Анализ постановки задачи показывает, что сомножители при степенях ε в (27) содержат соседние коэффициенты разложения и в этом смысле являются зацепленными. Для решения соответствующих уравнений разработана процедура расцепления.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МАССОПЕРЕНОСА В НУЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ.

Полагая $\varepsilon = 0$ в уравнении (27), получим ${}_1^0D\,\partial^2\rho^{(0)}/\partial z^2 = 0$. Результат интегрирования $\partial\rho^{(0)}/\partial z = A(r,t)$ с учетом граничных условий (28) позволяет установить $A(r,t) = 0$. Таким образом, в нулевом приближении плотность загрязнителя является функцией только от r и t $\rho^{(0)} = \rho^{(0)}(r,t)$. Следовательно, в нулевом приближе-

нии плотность дочернего загрязнителя в каждом цилиндрическом сечении с осью z одинакова по высоте несущего пласта. Далее приравняв коэффициенты при ε^1 к нулю в уравнении (27), получим (33), т.к. $\rho^{M(0)}(r,t)$ и $\rho^{(0)}(r,t)$ не зависят от переменной z. Вспомогательная функция $E(r,t)$, составленная из слагаемых уравнения (33), содержащих только нулевые коэффициенты разложений материнского и дочернего плотностей загрязнителей также не зависит от z. (34). (33) с учетом (34) можно представить следующим образом: ${}^0_1D\,\partial^2\rho^{(1)}/\partial z^2 = E(r,t)$. Проинтегрировав последовательно, найдем выражения для первой производной от первого коэффициента $\rho^{(1)}$ – $\partial\rho^{(1)}/\partial z = {}^1_0D\big(z\,E(r,t)+F(r,t)\big)$ и первого коэффициента разложения в виде квадратичного трехчлена (35) с функциональными коэффициентами, подлежащими определению. Из граничных условий (28) при сомножителе ε^1 получим выражения для функциональных коэффициентов (36). Подставив первое выражение из (36) в (34) получим искомое уравнение для определения нулевого приближения плотности примесей в пласте (37). Окончательная постановка задачи в нулевом приближении включает также уравнения в покрывающих и подстилающих породах (38) – (42)

$$\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial t} - {}^0_1D\frac{\partial^2\rho^{(1)}}{\partial z^2} + \frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial r} + \mathrm{Ad}\,\rho^{(0)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(0)} = 0 \tag{33}$$

$$E(r,t) = \frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial r} + \mathrm{Ad}\,\rho^{(0)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(0)} \tag{34}$$

$$\rho^{(1)} = {}^1_0D\left(\frac{z^2}{2}E(r,t) + z\,F(r,t) + Q(r,t)\right) \tag{35}$$

$$E(r,t) = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial\rho_1^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=1} - {}^2_1D\left.\frac{\partial\rho_2^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=-1}\right),\ F(r,t) = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial\rho_1^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=1} + {}^2_1D\left.\frac{\partial\rho_2^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=-1}\right) \tag{36}$$

$$\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{\partial\rho^{(0)}}{\partial r} + \mathrm{Ad}\,\rho^{(0)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(0)} = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial\rho_1^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=1} - {}^2_1D\left.\frac{\partial\rho_2^{(0)}}{\partial z}\right|_{z=-1}\right) \tag{37}$$

$$\frac{\partial\rho_1^{(0)}}{\partial t} - \frac{\partial^2\rho_1^{(0)}}{\partial z^2} + \mathrm{Ad}\,\rho_1^{(0)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho_1^{\mathrm{M}(0)} = 0, \quad t>0,\ r>0,\ z>1, \tag{38}$$

$$\frac{\partial\rho_2^{(0)}}{\partial t} - {}^2_1D\frac{\partial^2\rho_2^{(0)}}{\partial z^2} + \mathrm{Ad}\,\rho_2^{(0)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho_2^{\mathrm{M}(0)} = 0, \quad t>0,\ r>0,\ z<-1, \tag{39}$$

$$\rho^{(0)}\big|_{r=0} = \omega_0,\ \rho^{(0)}\big|_{z=1} = \rho_1^{(0)}\big|_{z=1} = \rho_2^{(0)}\big|_{z=-1} \tag{40}$$

$$\rho^{(0)}\big|_{t=0} = 0, \qquad \rho_1^{(0)}\big|_{t=0} = 0, \qquad \rho_2^{(0)}\big|_{t=0} = 0 \tag{41}$$

$$\rho^{(0)}\big|_{r\to+\infty} = 0,\ \rho_1^{(0)}\big|_{r+z\to+\infty} = 0,\ \rho_2^{(0)}\big|_{r+|z|\to+\infty} = 0 \tag{42}$$

Выражения (37) – (42) представляют краевую задачу для нулевого коэффициента разложения или нулевого приближения. Отметим, что она является смешанной, поскольку уравнение для пласта не является параболическим в отличие от исходной задачи. Кроме того, уравнение (37) содержит следы производных из внешних областей, и поэтому относится к числу неклассических.

Усреднив задачу (11) – (17) по z в пределах толщины пористого пласта получим, что усредненная задача совпадает с задачей (37) – (42) для нулевого приближения плотности радиогенного семейства, поэтому в силу единственности решения следует, что усредненные по толщине пласта значения плотности совпадают с нулевым приближением или нулевым коэффициентом разложения $\langle\rho\rangle = \rho^{(0)}$ для дочернего загрязнителя.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В НУЛЕВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ.

В пространстве преобразований Лапласа – Карсона задача (45) – (51) в нулевом приближении представляется как (43) – (47). Решения уравнений (43), (44) с учетом граничных условий (46) пред-

ставляются в виде (48), (49). Легко убедиться, что из выражений (48) и (49) следует, как частный случай, выражения для плотности материнского загрязнителя, которые ранее найдены в работе [2].

С помощью полученных выражений (48) и (49) найдем следы производных из внешних областей для преобразования правой части уравнения (45). Это представлено уравнением (50). Подставляя (50) в уравнение (45), после простых преобразований получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $\rho^{(0)u}$ (50а), решение, которого с учетом граничного условия (46), представится в виде (51).

Решение (51) может быть записано в виде (52), с учетом чего плотность концентрации дочернего радионуклида в настилающем и подстилающем пластах (48) – (49), может быть записана как (53).

$$p\rho_1^{(0)u} - \frac{\partial^2 \rho_1^{(0)u}}{\partial z^2} + \mathrm{Ad}\,\rho_1^{(0)u} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho_1^{\mathrm{M}(0)u} = 0, \quad r > 0,\ z > 1 \tag{43}$$

$$p\rho_2^{(0)u} - {}^2_1D\frac{\partial^2 \rho_2^{(0)u}}{\partial z^2} + \mathrm{Ad}\,\rho_2^{(0)u} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho_2^{\mathrm{M}(0)u} = 0, \quad r > 0,\ z < -1 \tag{44}$$

$$p\rho^{(0)u} + \frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{\partial \rho^{(0)u}}{\partial r} + \mathrm{Ad}\,\rho^{(0)u} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(0)u} = \frac{1}{2\gamma}\left(\left.\frac{\partial \rho_1^{(0)u}}{\partial z}\right|_{z=1} - {}^2_1D\left.\frac{\partial \rho_2^{(0)u}}{\partial z}\right|_{z=-1}\right),\ r > 0,\ |z| < 1 \tag{45}$$

$$\left.\rho^{(0)u}\right|_{r=0} = \omega_0, \quad \left.\rho_1^{(0)u}\right|_{z=1} = \gamma\rho^{(0)u} = \left.\rho_2^{(0)u}\right|_{z=-1} \tag{46}$$

$$\left.\rho^{(0)u}\right|_{r\to\infty} = 0, \quad \left.\rho_1^{(0)u}\right|_{r+z\to\infty} = 0, \quad \left.\rho^{(0)u}\right|_{r+|z|\to\infty} = 0 \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\rho_1^{(0)u} &= \rho^{(0)u}\exp\left(-\sqrt{p+\mathrm{Ad}}(z-1)\right) - \\ &- \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}-\mathrm{Ad}}\left[\exp\left(-\sqrt{p+\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}(z-1)\right) - \exp\left(-\sqrt{p+\mathrm{Ad}}(z-1)\right)\right]\rho^{\mathrm{M}(0)u}\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}\rho_2^{(0)u} &= \rho^{(0)u}\exp\left(\sqrt{{}^1_2D(p+\mathrm{Ad})}(z+1)\right) - \\ &- \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}-\mathrm{Ad}}\left[\exp\left(\sqrt{{}^1_2D(p+\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}})}(z+1)\right) - \exp\left(\sqrt{{}^1_2D(p+\mathrm{Ad})}(z+1)\right)\right]\rho^{\mathrm{M}(0)u}\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \rho_1^{(0)u}}{\partial z}\right|_{z=1} &= -\sqrt{p+\mathrm{Ad}}\,\rho^{(0)u} + \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}-\mathrm{Ad}}\left(\sqrt{p+\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}} - \sqrt{p+\mathrm{Ad}}\right)\rho^{\mathrm{M}(0)u} \\ \left.\frac{\partial \rho_2^{(0)u}}{\partial z}\right|_{z=-1} &= \sqrt{{}^1_2D(p+\mathrm{Ad})}\,\rho^{(0)u} + \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}-\mathrm{Ad}}\sqrt{{}^1_2D}\left(\sqrt{p+\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}} - \sqrt{p+\mathrm{Ad}}\right)\rho^{\mathrm{M}(0)u}\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{\partial \rho^{(0)u}}{\partial r} &= -\left(p + \mathrm{Ad} + \frac{\sqrt{p+\mathrm{Ad}}}{2}\left(1+\sqrt{{}^2_1D}\right)\right)\rho^{(0)u} + \\ &+ \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(0)u} + \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}-\mathrm{Ad}}\frac{1+\sqrt{{}^2_1D}}{2}\left(\sqrt{p+\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}} - \sqrt{p+\mathrm{Ad}}\right)\rho^{\mathrm{M}(0)u}\end{aligned} \tag{50a}$$

$$\begin{aligned}\rho^{(0)u} &= \omega_0\exp\left[-\left(p + \mathrm{Ad} + \frac{\sqrt{p+\mathrm{Ad}}}{2}\left(1+\sqrt{{}^2_1D}\right)\right)\frac{r^2}{2\,\mathrm{Pd}}\right] + \\ &+ \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}-\mathrm{At}_1}\exp\left[-\left(p + \mathrm{Ad} + \frac{\sqrt{p+\mathrm{Ad}}}{2}\left(1+\sqrt{{}^2_1D}\right)\right)\frac{r^2}{2\,\mathrm{Pd}}\right] - \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}-\mathrm{Ad}}\rho^{\mathrm{M}(0)u}\end{aligned} \tag{51}$$

$$\rho^{(0)u} = \omega_0\,\tilde{\rho}^{(0)u} + \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}-\mathrm{Ad}}\left(\tilde{\rho}^{(0)u} - \rho^{\mathrm{M}(0)u}\right) \tag{52}$$

$$\rho_1^{(0)u} = \omega_0\tilde{\rho}_1^{(0)u} + \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}-\mathrm{Ad}}\left(\tilde{\rho}_1^{(0)u} - \rho_1^{\mathrm{M}(0)u}\right),\ \rho_2^{(0)u} = \omega_0\,\tilde{\rho}_2^{(0)u} + \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}-\mathrm{Ad}}\left(\tilde{\rho}_2^{(0)u} - \rho_2^{\mathrm{M}(0)u}\right) \tag{53}$$

Функции $\tilde{\rho}^{(0)u}$, $\tilde{\rho}_1^{(0)u}$, $\tilde{\rho}_2^{(0)u}$ имеют смысл псевдоматеринской плотности в пористом, настилающем и подстилающем пластах, которые являются решениями системы (43) – (45) при $\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} = 0$, т.е. полагая материнский радионуклид стабильным изотопом ($T_{1/2} \to \infty$).

Выпишем выражения изображений первообразных плотностей дочернего и материнского радионуклида в соответствующих пластах

$$\tilde{\rho}^{(0)u} = \exp\left[-\left(p + \mathrm{Ad} + \frac{\sqrt{p+\mathrm{Ad}}}{2}\left(1+\sqrt{{}^{2}_{1}D}\right)\right)\frac{r^2}{2\,\mathrm{Pd}}\right]$$

$$\rho^{\mathrm{M}(0)u} = \exp\left[-\left(p + \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} + \frac{\sqrt{p+\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}}{2}\left(1+\sqrt{{}^{2}_{1}D}\right)\right)\frac{r^2}{2\,\mathrm{Pd}}\right] \tag{54}$$

$$\tilde{\rho}_1^{(0)u} = \exp\left[-\left(p + \mathrm{Ad} + \frac{\sqrt{p+\mathrm{Ad}}}{2}\left(1+\sqrt{{}^{2}_{1}D}\right)\right)\frac{r^2}{2\,\mathrm{Pd}}\right]\exp\left(-\sqrt{p+\mathrm{Ad}}\,(z-1)\right)$$

$$\rho_1^{\mathrm{M}(0)u} = \exp\left[-\left(p + \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} + \frac{\sqrt{p+\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}}{2}\left(1+\sqrt{{}^{2}_{1}D}\right)\right)\frac{r^2}{2\,\mathrm{Pd}}\right]\exp\left(-\sqrt{p+\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}\,(z-1)\right) \tag{55}$$

$$\tilde{\rho}_2^{(0)u} = \exp\left[-\left(p + \mathrm{Ad} + \frac{\sqrt{p+\mathrm{Ad}}}{2}\left(1+\sqrt{{}^{2}_{1}D}\right)\right)\frac{r^2}{2\,\mathrm{Pd}}\right]\exp\left(\sqrt{{}^{1}_{2}D\left(p+\mathrm{Ad}\right)}(z+1)\right)$$

$$\rho_2^{\mathrm{M}(0)u} = \exp\left[-\left(p + \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} + \frac{\sqrt{p+\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}}{2}\left(1+\sqrt{{}^{2}_{1}D}\right)\right)\frac{r^2}{2\,\mathrm{Pd}}\right]\exp\left(\sqrt{{}^{1}_{2}D\left(p+\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\right)}(z+1)\right) \tag{56}$$

Анализ выражений (54) – (56) показывает, что в изображениях плотности дочернего и материнского радионуклида отличаются друг от друга на постоянную радиоактивного распада Ad. Следовательно, и оригиналы первообразных плотностей дочернего радионуклида также будут совпадать с соответствующими плотностями материнского радиоактивного загрязнителя с точностью до замены постоянной радиоактивного распада Ad^{M} на величину Ad. Данное обстоятельство позволяет записать выражения первообразной плотности дочернего радионуклида в пластах в пространстве оригиналов с помощью известного оригинала плотности материнского радионуклида (57) [3].

$$\rho^{(0)} = \omega_0\,\rho^{\mathrm{M}(0)}\Big|_{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\to\mathrm{Ad}} + \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}-\mathrm{Ad}}\left(\rho^{\mathrm{M}(0)}\Big|_{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\to\mathrm{Ad}} - \rho^{\mathrm{M}(0)}\right)$$

$$\rho_1^{(0)} = \omega_0\,\rho_1^{\mathrm{M}(0)}\Big|_{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\to\mathrm{Ad}} + \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}-\mathrm{Ad}}\left(\rho_1^{\mathrm{M}(0)}\Big|_{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\to\mathrm{Ad}} - \rho_1^{\mathrm{M}(0)}\right) \tag{57}$$

$$\rho_2^{(0)} = \omega_0\,\rho_2^{\mathrm{M}(0)}\Big|_{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\to\mathrm{Ad}} + \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}-\mathrm{Ad}}\left(\rho_2^{\mathrm{M}(0)}\Big|_{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\to\mathrm{Ad}_1} - \rho_2^{\mathrm{M}(0)}\right)$$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ.

Уравнения (25) – (32) в первом приближении при коэффициенте ε^1 для настилающего и подстилающего пластов и при коэффициенте ε^2 для пористого пласта, принимают вид (58) – (60), а соответствующие граничные и начальные условия (61):

$$\frac{\partial\rho_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2\rho_1^{(1)}}{\partial z^2} + \mathrm{Ad}\,\rho_1^{(1)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho_1^{\mathrm{M}(1)} = 0, \quad t>0,\ r>0,\ z>1 \tag{58}$$

$$\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial t} + \frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{\partial\rho^{(1)}}{\partial r} - {}^{0}_{1}D\frac{\partial^2\rho^{(2)}}{\partial z^2} + \mathrm{Ad}\,\rho^{(1)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(1)} = 0, \quad t>0,\ r>0,\ |z|<1 \tag{59}$$

$$\frac{\partial \rho_2^{(1)}}{\partial t} - {}_1^2D\frac{\partial^2 \rho_2^{(1)}}{\partial z^2} + \mathrm{Ad}\,\rho_2^{(1)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho_2^{\mathrm{M}(1)} = 0, \quad t>0,\ r>0,\ z<-1 \tag{60}$$

$$\gamma\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial z}\bigg|_{z=1} - {}_0^1D\frac{\partial \rho_1^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=1} = 0,\ \gamma\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial z}\bigg|_{z=-1} - {}_0^2D\frac{\partial \rho_2^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=-1} = 0$$

$$\gamma\rho^{(1)}\big|_{z=1} = \rho_1^{(1)}\big|_{z=1},\quad \gamma\rho^{(1)}\big|_{z=-1} = \rho_2^{(1)}\big|_{z=-1},\ \rho^{(1)}\big|_{t=0} = 0,\quad \rho_1^{(1)}\big|_{t=0} = 0,\quad \rho_2^{(1)}\big|_{t=0} = 0 \tag{61}$$

$$\rho^{(1)}\big|_{r=0} = 0,\ \rho^{(1)}\big|_{r\to+\infty} = 0,\ \rho_1^{(1)}\big|_{r+z\to+\infty} = 0,\ \rho_2^{(1)}\big|_{r+|z|\to+\infty} = 0$$

Решение задачи ищется в форме квадратного многочлена относительно z согласно (35), где вспомогательные функции $E(r,t)$ и $F(r,t)$ определены выражениями (36), а функция $Q(r,t)$ пока неизвестна. Для ее определения запишем (59) в виде (62), где оператор $\hat{L} = \partial/\partial t + \mathrm{Pd}\,\partial/(r\,\partial r) + \mathrm{Ad}$. Учитывая выражение (35) и (62), а также линейность оператора $\hat{L}$, получим (63), проинтегрировав которое по переменной z, получим выражение (63а).

Используя условия сопряжения (61), имеем (64) – (65).

$$\frac{\partial^2 \rho^{(2)}}{\partial z^2} = {}_0^1D\left(\hat{L}\rho^{(1)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(1)}\right) \tag{62}$$

$$\frac{\partial^2 \rho^{(2)}}{\partial z^2} = \left({}_0^1D\right)^2\left(\frac{z^2}{2}\hat{L}E + z\hat{L}F + \hat{L}Q\right) - {}_0^1D\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(1)} \tag{63}$$

$$\frac{\partial \rho^{(2)}}{\partial z} = \left({}_0^1D\right)^2\left(\frac{z^3}{6}\hat{L}E + \frac{z^2}{2}\hat{L}F + z\hat{L}Q + R(r,t)\right) - {}_0^1D\,\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\int_0^z \rho^{\mathrm{M}(1)}(z')dz' \tag{63a}$$

$${}_0^1D\frac{\partial \rho_1^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=1} = \left({}_0^1D\right)^2\left(\frac{1}{6}\hat{L}E + \frac{1}{2}\hat{L}F + \hat{L}Q + R(r,t)\right) - {}_0^1D\,\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\int_0^1 \rho^{\mathrm{M}(1)}(z')dz' \tag{64}$$

$${}_0^2D\frac{\partial \rho_2^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=-1} = \left({}_0^1D\right)^2\left(-\frac{1}{6}\hat{L}E + \frac{1}{2}\hat{L}F - \hat{L}Q + R(r,t)\right) - {}_0^1D\,\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\int_0^{-1} \rho^{\mathrm{M}(1)}(z')dz' \tag{65}$$

Путем несложных преобразований уравнение для нахождения неизвестной функции Q представим как (66). Подставляя выражения (36), (66), (63) в (62), получим уравнение для нахождения первого коэффициента разложения в пористом слое (67), а также уравнения для окружающей среды (68) – (69).

Начальные условия, условия сопряжения и на границах представляются в виде (70) – (72). Как будет показано в следующем параграфе, условие (71) является избыточным, и может быть заменено нелокальным граничным условием, что соответствует появлению погранслоя, решение в котором легко уточнить с помощью погранслойных функций.

$$\hat{L}Q = \frac{{}_1^0D}{2}\left(\frac{\partial \rho_1^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=1} - {}_1^2D\frac{\partial \rho_2^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=-1}\right) - \frac{1}{6}\hat{L}E + \frac{{}_1^0D}{2}\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\int_{-1}^{1}\rho^{\mathrm{M}(1)}(z')dz' \tag{66}$$

$$\begin{aligned}\hat{L}\rho^{(1)} &= \frac{{}_0^1D}{4}\left(\frac{z^2}{2} - \frac{1}{3}\right)\hat{L}\left(\frac{\partial \rho_1^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z=1} - {}_1^2D\frac{\partial \rho_2^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z=-1}\right) + \\ &+ z\frac{{}_0^1D}{2}\hat{L}\left(\frac{\partial \rho_1^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z=1} + {}_1^2D\frac{\partial \rho_2^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z=-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \rho_1^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=1} - {}_1^2D\frac{\partial \rho_2^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=-1}\right) + \\ &+ \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{2}\int_{-1}^{1}\rho^{\mathrm{M}(1)}(z')dz', \quad t>0,\ r>0,\ |z|<1\end{aligned} \tag{67}$$

$$\frac{\partial \rho_1^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \rho_1^{(1)}}{\partial z^2} + \mathrm{Ad}\,\rho_1^{(1)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} \rho_1^{\mathrm{M}(1)} = 0, \quad t > 0,\ r > 0,\ z > 1 \tag{68}$$

$$\frac{\partial \rho_2^{(1)}}{\partial t} - {}_l^2 D \frac{\partial^2 \rho_2^{(1)}}{\partial z^2} + \mathrm{Ad}\,\rho_2^{(1)} - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} \rho_2^{\mathrm{M}(1)} = 0, \quad t > 0,\ r > 0,\ z < -1 \tag{69}$$

$$\gamma \rho^{(1)}\Big|_{z=1} = \rho_1^{(1)}\Big|_{z=1},\ \gamma\, \rho^{(1)}\Big|_{z=-1} = \rho_2^{(1)}\Big|_{z=-1} \tag{70}$$

$$\rho^{(1)}\Big|_{r=0} = 0,\ \rho^{(1)}\Big|_{t=0} = 0,\ \ \rho_1^{(1)}\Big|_{t=0} = 0,\ \ \rho_2^{(1)}\Big|_{t=0} = 0 \tag{71}$$

$$\rho^{(1)}\Big|_{r\to+\infty} = 0,\ \rho_1^{(1)}\Big|_{r+z\to+\infty} = 0,\ \rho_2^{(1)}\Big|_{r+|z|\to+\infty} = 0 \tag{72}$$

ЗАДАЧА ДЛЯ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА $\Theta^{(1)}$

Дополнительное интегральное условие для первого приближения задачи массопереноса. Подставив разложение с остаточным членом (24) при $n = 1$ в параметризованную задачу (25) – (32), получим задачу для остаточного члена. Построение точного решения задачи для остаточного члена представляет существенные трудности, поэтому ограничимся исследованием задачи, усредненной по толщине пласта. При усреднении второй производной по вертикальной координате воспользуемся условиями сопряжения (76). Окончательная постановка усредненной задачи для остаточного члена представится в виде (73) – (75) с грничными условиями (76) – (79):

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial z^2} = \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} \Theta_1^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}\,\Theta_1, \quad t > 0, \quad r > 0, \quad z > 1 \tag{73}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial \langle\Theta\rangle}{\partial t} + \frac{\mathrm{Pd}}{r}\frac{\partial \langle\Theta\rangle}{\partial r} + \mathrm{Ad}\langle\Theta\rangle - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\langle\Theta^{\mathrm{M}}\rangle - \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial z}\bigg|_{z=1} - {}_l^2 D \frac{\partial \Theta_2}{\partial z}\bigg|_{z=-1}\right) = \\ = -\varepsilon\left(\widehat{L}\langle\rho^{(1)}\rangle - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\langle\rho^{\mathrm{M}(1)}\rangle - \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{\partial \rho_1^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=1} - {}_l^2 D \frac{\partial \rho_2^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=-1}\right)\right), \quad t > 0, \quad r > 0, \quad |z| < 1\end{gathered} \tag{74}$$

$$\frac{\partial \Theta_2}{\partial t} - {}_l^2 D \frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial z^2} = \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} \Theta_2^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}\,\Theta_2, \quad t > 0, \quad r > 0, \quad z < -1 \tag{75}$$

$$\gamma\, \Theta\big|_{z=1} = \Theta_1\big|_{z=1},\ \ \gamma\, \Theta\,\big|_{z=-1} = \Theta_2\big|_{z=-1} \tag{76}$$

$$\langle\Theta\rangle\big|_{t=0} = 0,\ \Theta_1\big|_{t=0} = 0,\ \Theta_2\big|_{t=0} = 0 \tag{77}$$

$$\langle\Theta\rangle\big|_{r=0} = -\varepsilon\langle\rho^{(1)}\rangle\big|_{r=0} \tag{78}$$

$$\langle\Theta\rangle\big|_{r\to+\infty} = 0,\ \Theta_1\big|_{r+z\to+\infty} = 0,\ \Theta_2\big|_{r+|z|\to+\infty} = 0 \tag{79}$$

Нетрудно установить, что усредненная задача для остаточного члена (73) – (79) имеет тривиальное решение тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$\widehat{L}\langle\rho^{(1)}\rangle - \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\langle\rho^{\mathrm{M}(1)}\rangle - \frac{1}{2\gamma}\left(\frac{\partial \rho_1^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=1} - {}_l^2 D \frac{\partial \rho_2^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z=-1}\right) = 0 \tag{80}$$

$$\langle\rho^{(1)}\rangle\big|_{r=0} = 0 \tag{81}$$

То есть, когда в усредненной задаче для остаточного члена отсутствует источник. Усреднением (67) нетрудно убедиться, что выражение (80) выполняется тождественно, тогда условия (81) остаются единственными при котором усредненная задача для остаточного члена имеет тривиальное решение.

Найденное выше асимптотическое разложение по специальному параметру ε обладает важным свойством, заключающимся в том, что среднее зна-

чение остаточного члена может обращаться в нуль. Это, естественно, существенно повышает ценность решения для практических приложений. Асимптотическое приближение задачи (58) – (61), построенное при условии, что решение усредненной задачи для остаточного члена является тривиальным, назовем *«точным в среднем» асимптотическим решением.*

Итак, для получения точного в среднем решения необходимо потребовать выполнения дополнительного нелокального граничное условие (81) для первого коэффициента разложения в задаче (67) – (72).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЕРВОГО КОЭФФИЦИЕНТА РАЗЛОЖЕНИЯ.

Задача (67) – (72) с условием (89) решается методом интегральных преобразований Лапласа – Карсона и решение имеет следующий вид, соответственно, для пористого, покрывающего и подстилающего пластов:

$$\rho^{(1)} = \left(\omega_0 + \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}}\right)\rho^{\mathrm{M}(1)}\Big|_{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\to\mathrm{Ad}} - \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}}\rho^{\mathrm{M}(1)}$$

$$\rho_1^{(1)} = \left(\omega_0 + \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}}\right)\rho_1^{\mathrm{M}(1)}\Big|_{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\to\mathrm{Ad}} - \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}}\rho_1^{\mathrm{M}(1)} \qquad (82)$$

$$\rho_2^{(1)} = \left(\omega_0 + \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}}\right)\rho_2^{\mathrm{M}(1)}\Big|_{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\to\mathrm{Ad}} - \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}}\rho_2^{\mathrm{M}(1)}$$

Таким образом плотность концентрации дочернего радионуклида в пластах в пространстве оригиналов представится с помощью решений, полученных в работе [3] в виде (82).

Задача теплопереноса.

Математическая постановка задачи теплопереноса для всех областей включает уравнения теплопроводности с учётом радиоактивного распада в покрывающем (83), подстилающем (84) пластах, а также уравнение конвективного переноса с учётом радиоактивного распада в пористом пласте (85). В условия сопряжения входят равенства температур (86) и потоков тепла на границах раздела пластов (87):

$$c_1\rho_{\text{п}1}\frac{\partial T_{1\mathrm{d}}}{\partial\tau} - \lambda_{z1}\frac{\partial^2 T_{1\mathrm{d}}}{\partial z_{\mathrm{d}}^2} - \lambda_{r1}\frac{1}{r_{\mathrm{d}}}\frac{\partial}{\partial r_{\mathrm{d}}}\left(r_{\mathrm{d}}\frac{\partial T_{1\mathrm{d}}}{\partial r_{\mathrm{d}}}\right) = \alpha L\rho_{1\mathrm{d}},\ \tau>0,\ r_{\mathrm{d}}>0,\ z_{\mathrm{d}}>h \qquad (83)$$

$$c_2\rho_{\text{п}2}\frac{\partial T_{2\mathrm{d}}}{\partial\tau} - \lambda_{z2}\frac{\partial^2 T_{2\mathrm{d}}}{\partial z_{\mathrm{d}}^2} - \lambda_{r2}\frac{1}{r_{\mathrm{d}}}\frac{\partial}{\partial r_{\mathrm{d}}}\left(r_{\mathrm{d}}\frac{\partial T_{2\mathrm{d}}}{\partial r_{\mathrm{d}}}\right) = \alpha L\rho_{2\mathrm{d}},\ \tau>0,\ r_{\mathrm{d}}>0,\ z_{\mathrm{d}}<-h \qquad (84)$$

$$c\rho_{\text{п}}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial\tau} + c_f\rho_f\frac{\mathrm{v}_0' r_0}{r_{\mathrm{d}}}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial r_{\mathrm{d}}} - \lambda_z\frac{\partial^2 T_{\mathrm{d}}}{\partial z_{\mathrm{d}}^2} - \lambda_r\frac{1}{r_{\mathrm{d}}}\frac{\partial}{\partial r_{\mathrm{d}}}\left(r_{\mathrm{d}}\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial r_{\mathrm{d}}}\right) = \alpha L\rho_{\mathrm{d}}, \qquad (85)$$

$$\tau>0,\ r_{\mathrm{d}}>0,\ |z_{\mathrm{d}}|<h.$$

$$T_{\mathrm{d}}\big|_{z_{\mathrm{d}}=h} = T_{1\mathrm{d}}\big|_{z_{\mathrm{d}}=h},\ T_{\mathrm{d}}\big|_{z_{\mathrm{d}}=-h} = T_{2\mathrm{d}}\big|_{z_{\mathrm{d}}=-h} \qquad (86)$$

$$\lambda_z\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial z_{\mathrm{d}}}\bigg|_{z_{\mathrm{d}}=h} = \lambda_{z1}\frac{\partial T_{1\mathrm{d}}}{\partial z_{\mathrm{d}}}\bigg|_{z_{\mathrm{d}}=h},\ \lambda_z\frac{\partial T_{\mathrm{d}}}{\partial z_{\mathrm{d}}}\bigg|_{z_{\mathrm{d}}=-h} = \lambda_{z2}\frac{\partial T_{2\mathrm{d}}}{\partial z_{\mathrm{d}}}\bigg|_{z_{\mathrm{d}}=-h} \qquad (87)$$

В уравнениях (83) – (85) учтено, что плотность радиоактивного нуклида в пористой среде определяется через плотности загрязнителя в носителе ρ^f и в скелете ρ^s соотношением $\rho_{\mathrm{d}} = (1-m)\rho^s + m\rho^f$. В начальный момент времени и в бесконечно удаленных точках температура пластов равна естественной невозмущенной температуре Земли $T_\oplus$ (88), а температура загрязнителя в скважине, радиус которой считается малым по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, равна T_0 (89):

$$T_{\mathrm{d}}\big|_{\tau=0} = T_{1\mathrm{d}}\big|_{\tau=0} = T_{2\mathrm{d}}\big|_{\tau=0} = T_\oplus$$
$$T_{\mathrm{d}}\big|_{r_{\mathrm{d}}\to+\infty} = T_{1\mathrm{d}}\big|_{r_{\mathrm{d}}+z_{\mathrm{d}}\to+\infty} = T_{2\mathrm{d}}\big|_{r_{\mathrm{d}}+|z_{\mathrm{d}}|\to+\infty} = T_\oplus \qquad (88)$$

$$T_{\mathrm{d}}\big|_{r_{\mathrm{d}}=0} = T_0 \qquad (89)$$

Как будет показано ниже, за счет введения модифицированного коэффициента удельного тепловыделения $\widetilde{L}$, учитывающего вклад дочерних радионуклидов в общее температурное поле, решение температурной задачи для многокомпонентного загрязнителя аналогично решению задачи для однокомпонентного загрязнителя [4].

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ.

Во многих технологических жидких отходах атомной промышленности, как один из компонентов, содержится радиоактивный изотоп стронция

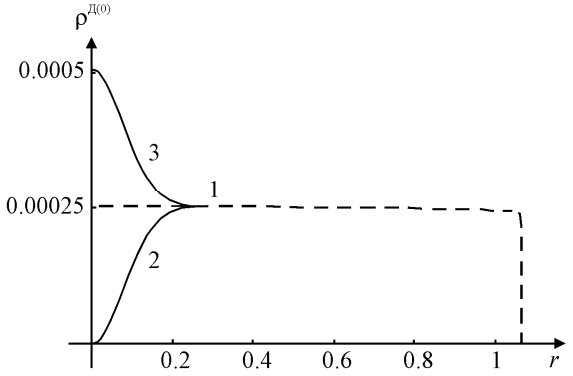

Рис.2. Зависимость плотности радионуклида иттрия-90 от безразмерного расстояния r до оси скважины в пористом пласте при различных граничных условиях: 1 – $\omega_0 = \omega_0^{равн.}$, 2 – $\omega_0 = 0$, 3 – $\omega_0 = 2\omega_0^{равн.}$. Время инжекции материнского радионуклида стронция-90 составляет $\tau = 1$ год.

Sr_{90}^{38} (с периодом полураспада $T_{1/2} = 28$ лет), являющийся весьма опасным химическим элементом для биологических структур из-за его способности замещать атомы кальция. Для определенности, считая стронций родоначальником радиоактивного семейства, построим поле концентраций его дочернего радионуклида, которым является короткоживущий радиоактивный изотоп иттрия Y_{90}^{39} с периодом полураспада $T_{1/2} = 64{,}2$ часа.

При практических расчетах использовались следующие значения входящих параметров:

$$K_{\Gamma} = 30,\ h = 10,\ {}_1^2D = 1,$$
$${}_0^1D = {}_0^2D = 0.1,\ \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} = 760,$$
$$\mathrm{Ad} = 3\cdot 10^6,\ \mathrm{Pd} = 18\cdot 10^3.$$

Анализируя кривые на рис.2 можно сделать вывод, что концентрация дочернего радионуклида (кривые *2* и *3*) довольно быстро выравнивается и на расстояниях $r > 3$м до оси скважины практически совпадает с кривой *1*, отвечающей концентрации загрязнителя при граничном условии $\omega_0 = \omega_0^{равн.} = \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}/\left(\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}} - \mathrm{Ad}\right)$ – равновесная концентрация иттрия-90 по отношению к стронцию-90.

Рассмотрим предел, к которому стремятся выражения (82) при условии $\mathrm{Ad} >> \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}$, учитывая, что по истечении некоторого времени концентрация дочернего радионуклида стремится к равновесной концентрации: выражения (90). Из них следует, что концентрация дочернего радионуклида линейно зависит от концентрации материнского. Эти выражения выполняются тем точнее, чем меньше отношение $\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}/\mathrm{Ad}$ и больше время распространения материнского радионуклида.

Отметим, что на захоронение, как правило, поступают радиоактивные растворы, в которых содержатся среднеживущие радиоизотопы, которые являются первичными для дальнейшей радиоактивной цепочки превращений и, поэтому образующиеся более короткоживущие дочерние радионуклиды будут находиться в равновесной концентрации со своим прародителем еще до момента закачки в глубокозалегающие пласты.

При решении температурной задачи возникает функция источников тепла q_e, которая зависит от концентрации присутствующих радионуклидов. Рассматривая цепочку превращений $Sr_{90}^{38} \to Y_{90}^{39} \to Zr_{90}^{40}(\textit{стабильный})$, получаем $q_e = L^{\mathrm{M}}\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(0)} + L\,\mathrm{Ad}\,\rho^{(0)}$, где L^{M}, L – коэффициент удельного тепловыделения стронция-90 и иттрия-90, соответственно. Подставляя выражение (90) в функцию источников тепла, получим соотношение (91), которое позволяет при цепочке радиоактивных превращений рассматривать только плотность материнского загрязнителя, а вклад дочерних радионуклидов в общее температурное поле учитывается введением модифицированного коэффициента удельного тепловыделения $\widetilde{L}$.

$$\rho^{(i)} \approx \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}}\rho^{\mathrm{M}(i)},\ \rho_1^{(i)} \approx \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}}\rho_1^{\mathrm{M}(i)},\ \rho_2^{(i)} \approx \frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}}\rho_2^{\mathrm{M}(i)} \tag{90}$$

$$q_e \cong L^{\mathrm{M}}\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(0)} + L\,\mathrm{Ad}\frac{\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}}{\mathrm{Ad}}\rho^{\mathrm{M}(0)} = \mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(0)}\left(L^{\mathrm{M}} + L\right) = \widetilde{L}\,\mathrm{Ad}^{\mathrm{M}}\rho^{\mathrm{M}(0)} \tag{91}$$

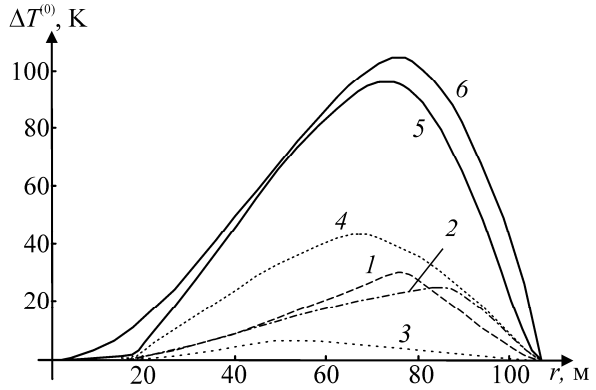

Рис.3. Зависимость температуры, обусловленной распадом, от расстояния до оси скважины в пористом пласте для следующих радиоактивных примесей: *1*− стронция-90; *2*− рутения-106; *3* − цезия-137; *4* − условным радионуклидом. Кривые *5* − результирующая температура, *6* − без учета теплообмена с водоупорными пластами. Время инжекции $\tau_1 = 2$ года

Произведем оценку тепловыделения иттрия-90 по отношению к тепловыделению стронция-90, учитывая, что радиоизотопы Sr_{90}^{38}, Y_{90}^{39} являются чистыми β-излучателями, со средними энергиями вылетающих электронов порядка 0.196 МэВ и 0.89 МэВ, соответственно. Из отношения средних энергий следует, что учет тепловыделения иттрия-90 повышает почти в 4.5 раза общее тепловыделение при распаде нуклидов.

На рис.3 показаны зависимости температуры, обусловленные радиоактивным распадом компонентов закачиваемого раствора, а также суммарное температурное поле, возникающее в пористом пласте, для двухлетней инжекции отходов с начальной удельной активностью раствора 1 Ки/л.

Кривая *6* построена для предельного случая, когда пренебрегается теплообменом с окружающими пористый пласт породами. Из сравнения кривых *5* и *6* следует, что учет теплообмена с окружающими пластами уменьшает максимальную температуру в пласте приблизительно на 20^0С. Расчетные формулы для предельного случая определяют наибольшую достижимую температуру в пласте. Максимальная температура в пласте (кривая *5*) достигает 100^0С, что не превосходит температуру кипения воды в пластовых условиях.

Итак, с помощью асимптотического метода получены плотности дочернего загрязнителя в нулевом и первом приближениях. Показана практическая применимость приближения (90) в реальных условиях закачки жидких радиоактивных отходов в глубокозалегающие горизонты. Найденное выражение (91) существенно облегчает учет вклада в тепловое поле всех образующихся дочерних радионуклидов, а оценка тепловыделения дочернего радионуклида, на примере иттрия-90, показала необходимость такого учета.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.И. Рыбальченко, М.К. Пименов, П.П. Костин и др. Глубинное захоронение жидких радиоактивных отходов. М.: «ИздАТ», 1994, 256 с.
2. А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, Д.А. Гюнтер, Д.В. Иванов. «Точное в среднем» асимптотическое решение задачи о подземном захоронении радиоактивных отходов. // Вестник Херсонского национального технического университета. Херсон: ХНТУ, В. 2(28), 2007.
3. А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, Д.А. Гюнтер, Д.В. Иванов. Поля концентраций радиоактивных веществ при подземном захоронении. // ИФЖ. 2008. Т. 81, №5. – С. 911–923.
4. А.И. Филиппов, П.Н. Михайлов, Д.А. Гюнтер, Д.В. Иванов. Моделирование взаимосвязанных процессов тепло- и массопереноса при подземном захоронении радиоактивных отходов. // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика радиационных повреждений и радиационное материаловедение (92) – Харьков, 2008. №2. – С. 83–91.