МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИКИ В ТЕПЛОВЫХ ДВИГАТЕЛЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Ветчанин Е.В., Тененев В.А.

Ижевский государственный технический университет, Ижевск, Россия

АННОТАЦИЯ

Дан алгоритм построения блочной расчетной сетки комплексным методом граничных элементов. Представлены результаты численного моделирования течения в области со сложной геометрией с использованием ортогональной сетки и многосеточного метода.

АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для твердотопливного ракетного двигателя при оценке энерго-массовых характеристик важными являются значения газодинамических параметров в камере сгорания и сопле. Даже для осесимметричных конструкций область течения имеет сложную геометрию. К сложной геометрии приводит наличие сопла, вдвинутого в камеру сгорания («утопленное» сопло), имеющиеся радиальные проточки, открытые торцы зарядов. Расчет течений в таких областях сопряжен с вычислительными сложностями, обусловленными сложной формой границ. В данной работе рассматривается подход к расчету осесимметричных течений, основанный на применении криволинейных ортогональных сеток и многосеточного метода. Для сложной геометрии области течения предлагается блочное разбиение на сопряженные подобласти. Общий вид области показан на рис.1.

Рассматриваемая область имеет сложную геометрию и изначально необходимо построить сетку. Расчетную сетку близкую к ортогональной можно построить с помощью комплексного метода граничных элементов (КМГЭ). Математические основы метода подробно описаны в [1], в [2] описаны его преимущества по отношению к другим методам построения сеток.

КМГЭ строит конформное отображение исходной физической области Ω с границей Γ в расчетную область Π с границей G, координатные линии сетки будут представлять собой линии тока и изопотенциальные линии некоторого потенциального течения.

При использовании КМГЭ граница области аппроксимируется ломаной линией с координатами узлов $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, L$ в комплексной области *Z*.

На участках границы задаются граничные значения функций φ и ψ

$$\begin{aligned} &AB: \varphi = 0 \\ &BC: \psi = 0 \\ &DA: \psi = 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

$$CD: \psi = \frac{s - s_C}{s_D - s_C},$$

где s_C - расстояние, отсчитываемое по границе области Ω от точки C.

φ и ψ являются действительной и мнимой частями некоторой аналитической в Ω функции $\omega = \varphi + i\psi$, для которой имеет место интеграл Коши

$$\omega(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega(\rho)d\rho}{\rho - z_0} \qquad (2)$$

С использованием линейной аппроксимации ω интеграл (2), как показано в [1], записывается в виде

$$\omega(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{L}\frac{(z_0 - z_k)\omega_{k+1} - (z_0 - z_{k+1})\omega_k}{z_{k+1} - z_k} \times \ln\left(\frac{z_{k+1} - z_0}{z_k - z_0}\right) \qquad (3)$$

При известных значениях ω_k выражение (3) определяет аналитическую в области функцию.

Условия (1) задают в каждом граничном узле одну из функций φ или ψ. Поэтому необходимо определить неизвестные значения этих функций. Для этого точка z_0 устремляется к каждому граничному узлу z_k в соответствии с (3). В результате предельного перехода получается L линейных алгебраических уравнений относительно L неизвестных граничных значений функций φ и ψ.

После определения граничных значений строятся линии равных уровней φ и ψ, которые покрывают расчетную область Π. Для определения узлов сетки в физической области Ω необходимо решить уравнения

$$x_{\varphi\varphi} + x_{\psi\psi} = 0 \qquad (4)$$

$$y_{\varphi\varphi} + y_{\psi\psi} = 0 \qquad (5)$$

© Ветчанин Е.В., Тененев В.А.

Тогда для аналитической в области Π ($\omega \in \Pi$) функции $z(\varphi,\psi) = x(\varphi,\psi) + iy(\varphi,\psi)$ также справедлива интегральная формула Коши

$$z(\omega_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z(\rho)d\rho}{\rho - \omega_0} \qquad (6)$$

Значения $\omega_0 = \varphi_m + i\psi_n$ определяются с помощью заданных уровней функций φ_m, ψ_n, $m = 1,M$, $n = 1,N$. Тогда координаты внутренних узлов криволинейной ортогональной сетки $z_0 = x_{mn} + iy_{mn}$ определяются выражением

$$z(\omega_0) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{L}\frac{(\omega_0-\omega_k)z_{k+1}-(\omega_0-\omega_{k+1})z_k}{\omega_{k+1}-\omega_k}\ln\left(\frac{\omega_{k+1}-\omega_0}{\omega_k-\omega_0}\right) \qquad (7)$$

При вычислении неизвестных граничных значений ω_k их величины необязательно совпадут с заданными, что связано с погрешностями аппроксимации и вычислений. Поскольку требуется отобразить физическую область Ω в прямоугольник Π, то найденные граничные значения поправляются соответствующим образом. Полученные по формуле (7) координатные линии могут иметь перехлест вблизи сильно искривленных границ, поэтому их следует рассматривать как начальное приближение. Координаты внутренних узлов сетки уточняются с помощью численного решения уравнений (4) и (5) по сильно неявной процедуре (SIP) [3].

Данный подход эффективен для не очень сложных областей. Для рассматриваемой области с помощью описанного подхода в исходном виде не удается построить качественную сетку, часть координатных линий будут сильно разрежены. В связи с этим предлагается строить блочную сетку. Область условно разбивается на несколько блоков (рис.1) некоторой границей, которая будет определена в процессе построения сетки

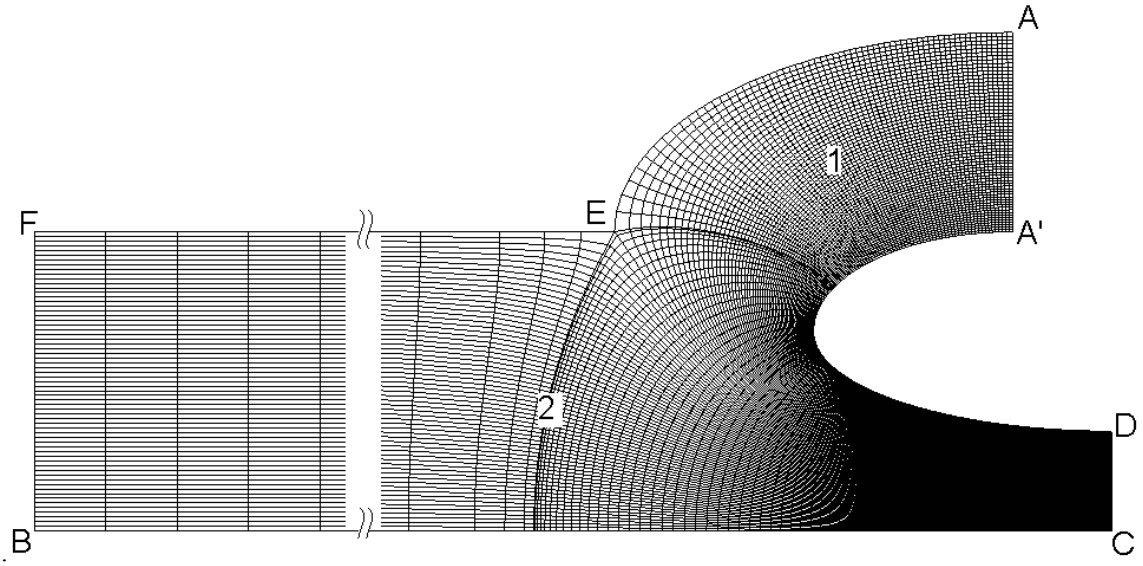

Рис.1. Физическая область, покрытая блочной сеткой

При использовании КМГЭ исходная физическая область отобразится в расчетную область, которая является тоже блочной, но каждый блок представляет собой прямоугольник. Вид этой области показан на рис.2.

Для построения блочной сетки необходимо задать следующие граничные значения функций φ и ψ

$$\begin{aligned}
&CD: \varphi = \varphi_0\\
&DA': \psi = 2\\
&A'A: \psi = \frac{s - s_A}{s_{A'} - s_A} + 1\\
&AE: \psi = 1\\
&EF: \psi = 1\\
&FB: \psi = \frac{s - s_B}{s_F - s_B}\\
&BC: \psi = 0.
\end{aligned} \qquad (8)$$

Построение сетки усложняется необходимостью стыковки блоков.

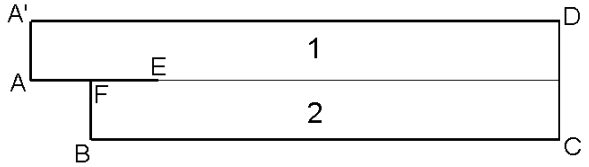

Рис.2. Расчетная область (толстые линии – граница области, тонкая линия – граница стыковки блоков)

Для расчета газодинамики был выбран метод контрольного объема [4]. В данном методе наиболее затратным, с точки зрения машинного времени, является расчет поправок к давлению, т.к. система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для поправок плохо обусловлена и имеет достаточно большую размерность. Обусловленность системы ухудшается при сгущении сетки и наличии сильно меняющихся физических параметров. В вычислительной газовой динамике эти два фактора действуют, как правило, совместно. В данной работе рассматривается течение в камере сгорания и околосопловой части, где $M \le 0{,}3$, постановка задачи приведена в [5].

Известно успешное применение метода сопряженных градиентов с преобуславливанием для численного решения плохообусловленных СЛАУ большой размерности в работах [5], [6]. В ряде работ [7], [8], [9] описаны многосеточные методы, которые применялись при решении задач газовой динамики в работе [10]. В таблице 1 ниже приведены затраты многосеточных методов и метода сопряженных градиентов с предобуславливанием при решении задачи Пуассона в единичном квадрате на сетках разного размера. Критерием остановки было условие $\max_{ij}|r_{ij}| < 10^{-6}$, где r_{ij} - невязка для узла ij.

Тестирование проводилось на ЭВМ с характеристиками: CPU AMD ATHLON 64 X2 5600+, RAM Samsung DDR-II 2GB (PC2-6400) 800MHz.

Многосеточные методы, достаточно быстро достигают заданной точности решения, причем полный многосеточный метод сходится быстрее за счет поиска начального приближения. Метод сопряженных градиентов с преобуславливанием достигает сходимости за 16 с, что почти в 15 раз дольше, чем при использовании полного многосеточного метода.

Для расчетов была использовалась блочная криволинейная ортогональная сетка, построенная КМГЭ. Размер каждого блока составил 128×64 ячеек. В результаты расчетов было получено поле скорости в околосопловой части, представленное на рис.4 и 5.

Размер сетки	Метод сопряженных градиентов с преобуславливанием	Многосеточный метод, с	Полный многосеточный метод, с
512×512	15,8236	1,38068	1,06193
1024×1024	105,923	5,9333	3,887
2048×2048	842,913	22,9758	13,7384

Табл.1. Затраты различных методов при решении задачи Пуассона

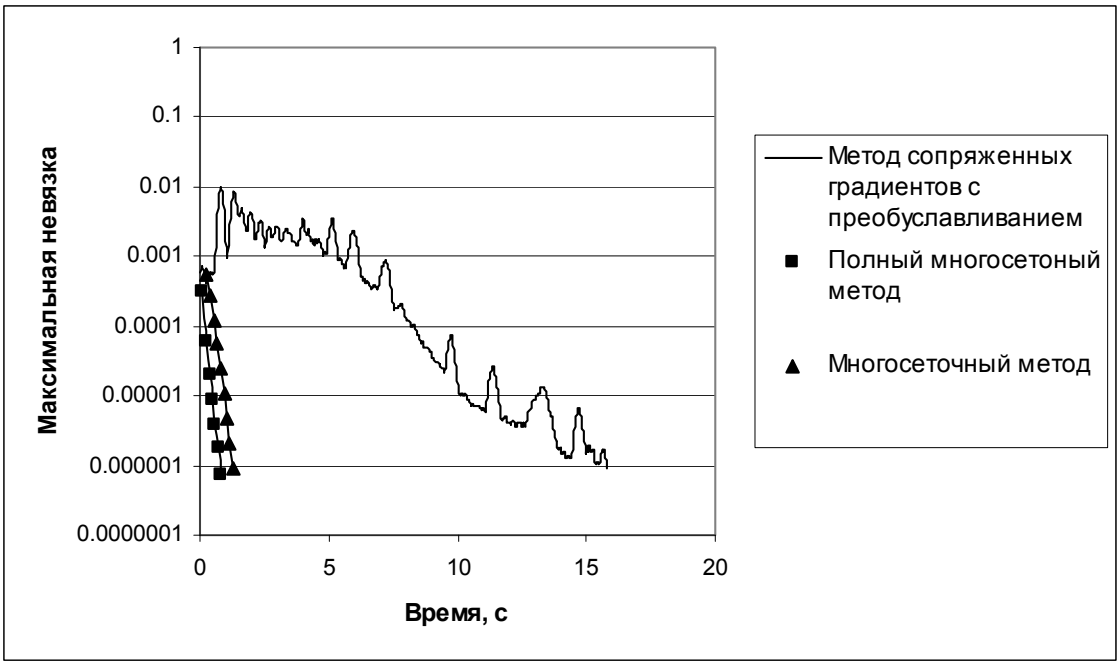

Рис.3. Поведение методов на равномерной сетке 512×512

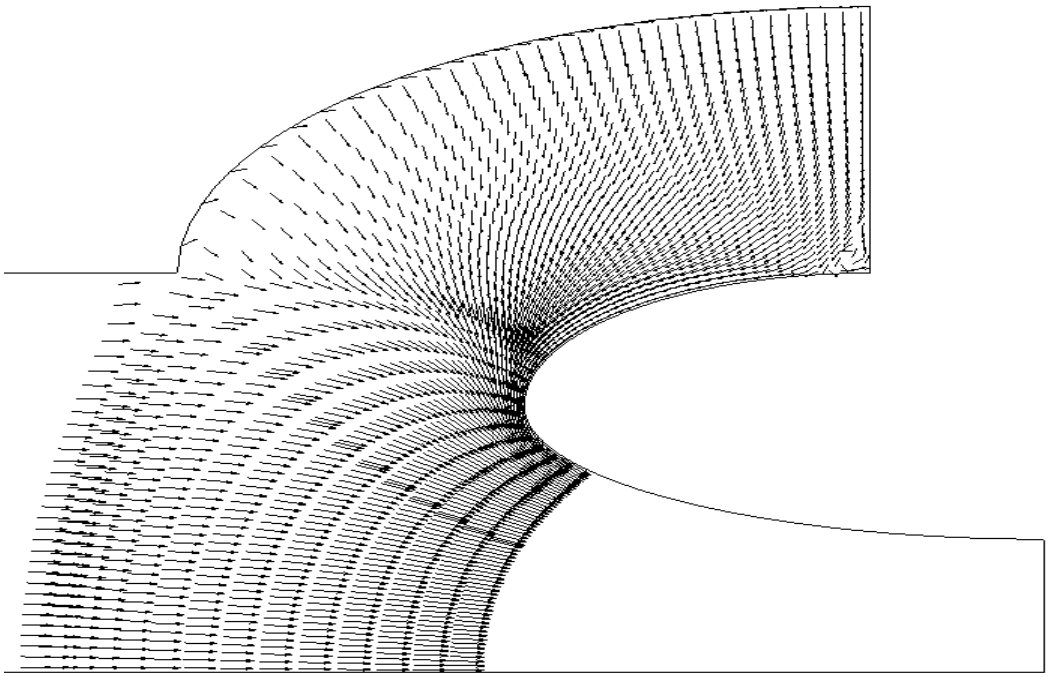

Рис.4. Течение в околосопловой части

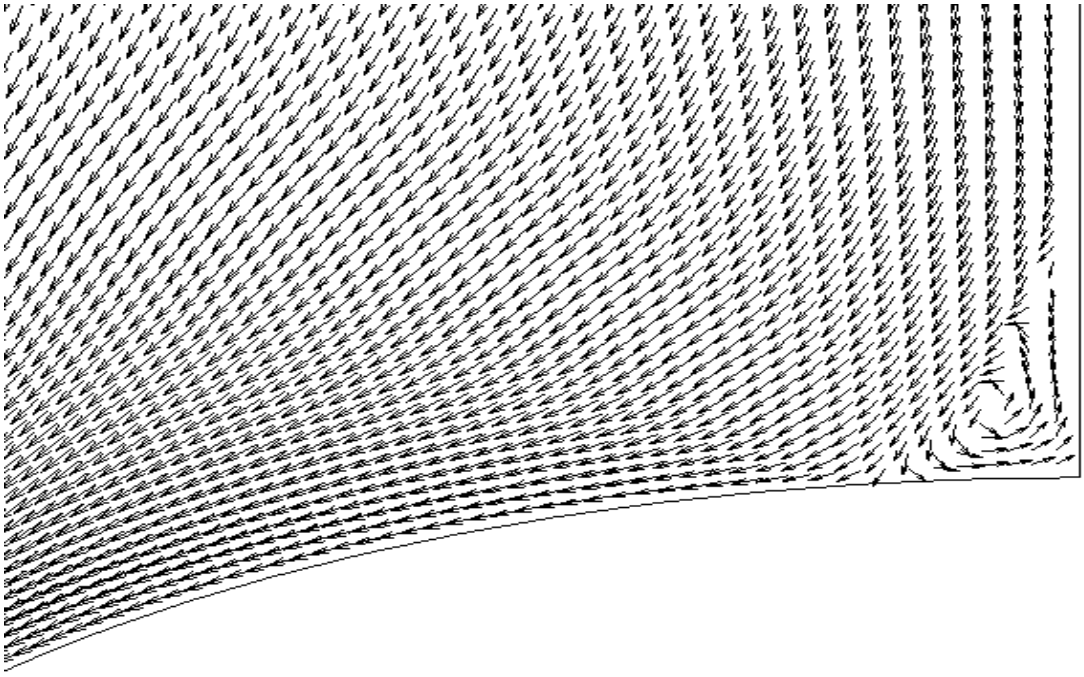

Рис.5. Вихревая зона

Для рассмотренной задачи при использовании полного многосеточного метода сходимость достигается в среднем за 76 с., из них на расчет поправок к давлению тратится в среднем 47 с. При использовании метода сопряженных градиентов с предобуславливанием – за 168 с., из них на расчет поправок к давлению тратится в среднем 147 с.

ВЫВОДЫ

В данной работе показана возможность построения блочных сеток комплексным методом граничных элементов. Сетка, построенная данным методом будет близкой к ортогональной, т.к. ее координатные линии являются линиями тока и изопотенциальными линиями некоторого потенциального течения.

Применение многосеточных методов значительно ускоряет решение задач газовой динамики. К тому же они более устойчивы к сильно меняющимся коэффициентам. В данной работе применялся полный многосеточный метод, время работы которого линейно зависит от размерности системы. Для более подробных сеток и трехмерного случая многосеточные методы будут давать еще большее снижение требуемого машинного времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Громадка П.Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1990. 303 с.
2. Тененев В.А., Русяк И.Г. Численное решение задач гидродинамики и теплообмена в областях сложной формы: Учебно-методическое пособие. – Ижевск: Издательство ИжГТУ, 1996. – 60 с.
3. Е.В. Ветчанин Сравнительная эффективность многосеточных методов решения систем разностных уравнений // Интеллектуальные системы в производстве.
4. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоиздат, 1984. – 150 с.
5. Бендерский Б.Я., Тененев В.А. Экспериментально-численное исследование течений в осесимметричных каналах сложной формы с вдувом. Изв. РАН МЖГ №2, 2001.
6. Бендерский Б.Я., Тененев В.А. Пространственные дозвуковые течения в областях со сложной геометрией. //Математическое моделирование, т.13, №8, 2001.с.47-52.
7. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику: Учеб. пособие: Для вузов. – М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994. – 528 с.
8. P. Wesseling An introduction to multigrid methods
9. U. Trottenberg, C. W. Oosterlee, A. Schüller Multigrid
10. Ни Р.-Х. Многосеточный метод для решения уравнений Эйлера //Аэро-косм. Техника. – 1983. N6. с.61-69.