

УДК 532.517.2

**КАТЯЩИЕСЯ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ  
ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ****Накоряков В.Е., Остапенко В.В., Барташевич М.В.**

*Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия*  
*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия*  
*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ № 11.G34.31.0046 (К.Ханьялич, Новосибирский государственный университет) и при поддержке РФФИ (проект 13-01-00249, 12-01-00145).

**АННОТАЦИЯ**

Рассматривается математическая модель распространения катящихся волн на поверхности вертикальной пленки жидкости, учитывающая теплоперенос на межфазной поверхности. Построены семейства обобщенных решений уравнения катящейся волны, в

которых бегущие волны сопрягаются через сильный и слабый разрывы друг с другом или с “остаточной” толщиной. Эти решения качественно моделируют стекание пленочного конденсата и испаряющейся пленки жидкости по вертикальной поверхности теплообмена.

**ВВЕДЕНИЕ**

Теплообмен при конденсации неподвижного насыщенного пара на вертикальной поверхности был впервые рассмотрен Нуссельтом [1] для случая ламинарного течения пленки конденсата. Однако теория Нуссельта справедлива лишь при малых значениях числа Рейнольдса. Уже при числах Рейнольдса порядка нескольких единиц в стекающей пленке образуются волны, интенсифицирующие теплообмен [2]. Приоритетные исследования волновых течений тонких слоев вязкой жидкости по твердой поверхности проведены Капицей [3]. Автор отмечал, что подобные течения можно, скорее, характеризовать не как волновые, а как скатывание по стенке капель жидкости растянутой формы. В дальнейшем теоретические и экспериментальные исследования пленочных течений, в том числе с учетом теплопереноса на свободной поверхности, проводились во многих работах, например в [4-8]. При этом в [5] показана возможность существования бегущих волн на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости даже без учета влияния поверхностного натяжения и получено уравнение, описывающее распространение таких волн.

Точные разрывные решения этого уравнения качественно соответствуют результатам экспериментов [5]. Полученные в [6] катящиеся волны имеют большую основную часть и движущийся впереди неё с той же скоростью предвестник капиллярной природы, имеющей вид затухающей гармонической волны. В этой работе были также исследованы волновые характеристики двумерных стационарных катящихся волн на вертикальной пленке жидкости. Было показано, что характеристики волн большой амплитуды на тонкой вертикальной пленке сильно зависят от вязкости жидкости и могут иметь некапиллярную природу. В качестве рабочих жидкостей использовались вода, водные растворы глицерина и этилового спирта. Вязкость варьировалась от  $0.9 \cdot 10^{-6}$  до  $11.2 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Волны образовывались на некотором расстоянии от места истечения жидкости, их амплитуда быстро возрастала, затем происходил выход на стационарный режим. Наблюдалась линейная зависимость фазовой скорости катящихся волн от их амплитуды, при этом скорость не зависела от среднего расхода жидкости и слабо от поверхностного натяжения. В [8] на основе обработки большо-

го объема экспериментальных данных была предложена оригинальная “модель бора”, связанная с эффектом “бульдозера”, когда при сохранении автомодельности профиля волны объем жидкости в ней увеличивается, также увеличивается высота волны и уменьшается толщина непрерывного слоя.

Несмотря на большое количество теоретических и экспериментальных работ, посвященных изучению различных видов и режимов пленочных течений (например, ручейковые течения, пленочные течения в спутном потоке газа, течения по структурированным поверхностям), физика волнообразования

на поверхности тонких слоев жидкости исследована недостаточно. В частности недостаточно изучена гидродинамика пленочных течений с учетом тепломассопереноса на поверхности раздела газ-жидкость. В настоящей работе рассматривается модель, учитывающая тепломассоперенос на межфазной поверхности при стекании тонкой пленки жидкости по вертикальной стенке в режиме катящихся волн. Построены семейства обобщенных решений уравнения катящейся волны, в которых бегущие волны сопрягаются через сильный и слабый разрывы друг с другом или с “остаточной” толщиной.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В рамках длинноволнового приближения, когда толщина пленки  $h = h(x, t)$  много меньше характерной длины волны, для описания пленочного течения с учетом тепломассопереноса на межфазной поверхности при медленном течении справедливо приближение пограничного слоя. Пусть ось  $x$  направлена вдоль поверхности стекания по направлению стекания пленки, а ось  $y$  направлена по нормали к поверхности стекания. На твердой поверхности при  $y = 0$  ставится условие прилипания и задается температура стенки  $T_w$ . На свободной поверхности при  $y = h(x, t)$  ставится условие отсутствия касательного напряжения и задается температура насыщения  $T_s$ . На изотермической свободной поверхности выполнено кинематическое условие

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{b}{h}, \quad b = \frac{\lambda \Delta T}{\rho r} = const, \quad (1)$$

где  $u, v$  – компоненты вектора скорости,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\rho$  – плотность жидкости,  $r$  – теплота фазового перехода,  $\Delta T = T_s - T_w$ .

В рамках длинноволнового приближения выражение для профиля скорости имеет вид [9]

$$u = \frac{gh^2}{2\nu} \left( \frac{2y}{h} - \frac{y^2}{h^2} \right), \quad (2)$$

где  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $g$  – ускорение свободного падения. Из (2), путем интегрирования по толщине пленки, получаем значение среднего по сечению расхода жидкости  $q = gh^3 / (3\nu)$ . С учетом этого в безразмерных переменных изменение толщины пленки жидкости  $h$  описывается дифференциальным уравнением катящейся волны

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial h^3}{\partial x} = \frac{\beta}{h} \quad (3)$$

где  $\beta = bv / (gl^3)$  безразмерный параметр, в котором  $l$  – характерный масштаб длины.

Решения уравнения (3), зависящие только от временной переменной  $t$ , когда  $h_x = 0$ , имеют вид

$$h = H(t, \eta) = \sqrt{2\beta t + \eta^2}. \quad (4)$$

Эти решения описывает рост во времени начальной толщины пленки  $\eta$ . Уравнение (3) допускает автомодельные решения типа бегущих волн

$$h = h_{\pm}(x, t, x_0, V) = \sqrt{V \pm 2\sqrt{\beta}(\xi - x_0)}, \quad (5)$$

зависящие от переменной  $\xi = x - Vt$ , где  $V$  – скорость волны.

Комбинируя решения (4) и (5) можно построить непрерывные решения

$$h = \begin{cases} H(t, \eta_r), & -\infty < x \leq a(t), \\ h_{\pm}(x, t, x_0, V), & a(t) \leq x \leq b(t), \\ H(t, \eta_r), & b(t) \leq x < +\infty, \end{cases} \quad (6)$$

в которых бегущая волна  $h_{\pm}$  через слабые разрывы соединяется с двумя различными “остаточными” глубинами  $H(t, \eta_r)$  и  $H(t, \eta_r)$ , где  $a(t)$  и  $b(t)$  – границы бегущей волны. Используя формулы (4) и (5) можно также построить непрерывные решения (рис.1)

$$h = \begin{cases} H(t, \eta), & -\infty < x \leq a(t), \\ h_{+}(x, t, x_0^{+}, V_{+}), & a(t) \leq x < b(t), \\ h_{-}(x, t, x_0^{-}, V_{-}), & b(t) \leq x \leq c(t), \\ H(t, \eta), & c(t) \leq x < +\infty \end{cases} \quad (7)$$

где

$$h_+(b(t), t, x_0^+, V_+) = h_-(b(t), t, x_0^-, V_-) = h_b(t), \quad (8)$$

моделирующие стекание по “остаточной” глубине  $H$  уединенных каплей с непрерывным профилем свободной поверхности. Эти решения, для существования которых должны выполняться условия  $V_- > V_+$ ,  $\sqrt{V_+} \leq \eta < h_b(0)$ ,  $|x_0^+ - x_0^-| < \omega$ , представляют собой бегущие со скоростями  $V_+$  и  $V_-$  волны повышения  $h_+$  и понижения  $h_-$ , сопряженные с остаточной глубиной  $H$  через слабые разрывы, которые расположены на линиях  $x = a(t)$  и  $x = c(t)$ .

Поскольку при  $h > 0$  уравнение (3) является гиперболическим, оно допускает обобщенные решения с сильными разрывами, на фронтах которых выполнены условия Гюгонио [10]. Решение (7) является непрерывным до момента

времени  $T_1 = (V_- - V_+) / (4\beta) + (x_0^+ - x_0^-) / (V_- - V_+)$ . При  $t > T_1$  в решении (7) на линии  $x = b(t)$  возникает сильный разрыв, который постепенно “поглощает” волну понижения  $h_-$  и при  $t \geq T_2$ , где  $b(T_2) = c(T_2)$ , волна понижения  $h_-$  перестает существовать, а решение (7) принимает вид (рис.2)

$$h = \begin{cases} H(t, \eta), & -\infty < x \leq a(t), \\ h_+(x, t, x_0^+, V_+), & a(t) \leq x < b(t), \\ H(t, \eta), & b(t) \leq x < +\infty, \end{cases} \quad (9)$$

при котором сильный разрыв продолжает распространяться по остаточной глубине  $H$ . Поскольку остаточная глубина  $H$  растет быстрее, чем глубина жидкости в капле (рис.2), в некоторый момент времени  $T_3 > T_2$  “остаточная” глубина полностью поглощает каплю.

### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рисунках 1-3 приведены графики точных решений уравнения (3), соответствующие режимам конденсации (при значении параметра  $\beta = 1$ , рис. 1-2) и испарения ( $\beta = -1$ , рис.3).

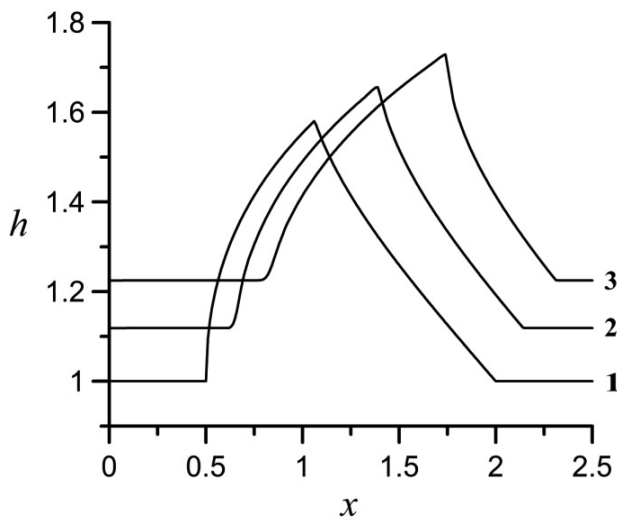


Рис.1 Профили непрерывного решения (7), моделирующего стекание уединенной капли. Линия 1 –  $t_1 = 0$ , линия 2 –  $t_2 = 0.125$ , линия 3 –  $t_3 = 0.25$ .

На рисунках 1 и 2 на пять последовательных моментов времени приведены графики решения (7) при  $V_+ = 1$ ,  $V_- = 3$ ,  $\eta = 1$ ,  $x_0^+ = 0.5$ ,  $x_0^- = 1$ . На начальном временном ин-

тервале  $[0, t_3]$ , где  $t_3 = T_1 = 0.25$ , приведенном на рис.1, решение (7) является непрерывным (8). На рис.2 приведены графики решения (7) при  $t \geq T_1 = 0.25$ , когда оно становится разрывным.

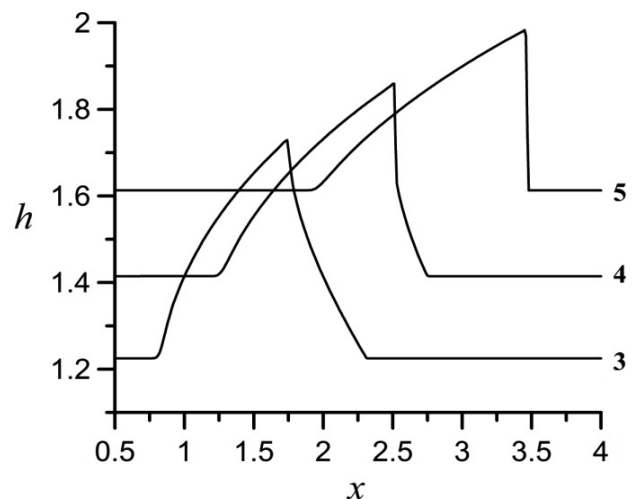


Рис.2 Профили решений (7) и (9), моделирующих стекание уединенной капли, на переднем фронте которой формируется сильный разрыв, на три момента времени. Линия 3 –  $t_3 = 0.25$ , линия 4 –  $t_4 = 0.5$ , линия 5 –  $t_5 = 0.8$ .

На рис.3 на пять последовательных моментов времени приведены графики решения

$$h = \begin{cases} H(t, \eta), & -\infty < x \leq a(t), \\ h_-(x, t, x_0^-, V_-), & a(t) \leq x < b(t), \\ h_+(x, t, x_0^+, V_+), & b(t) \leq x \leq c(t), \\ H(t, \eta), & c(t) \leq x < +\infty \end{cases} \quad (10)$$

уравнения (3), где  $V_+ = 2$ ,  $V_- = 6$ ,  $x_0^+ = 4.0$ ,  $x_0^- = 2.0$ ,  $\eta = 2$ . В этом решении глубина “остаточного” слоя и глубина жидкости в капле постепенно уменьшаются. Поскольку глубина “остаточного” слоя уменьшается быстрее, чем глубина жидкости в капле, решение (10) моделирует процесс формирования капель конечного размера из малых возмущений на поверхности стекающей испаряющейся пленки жидкости.

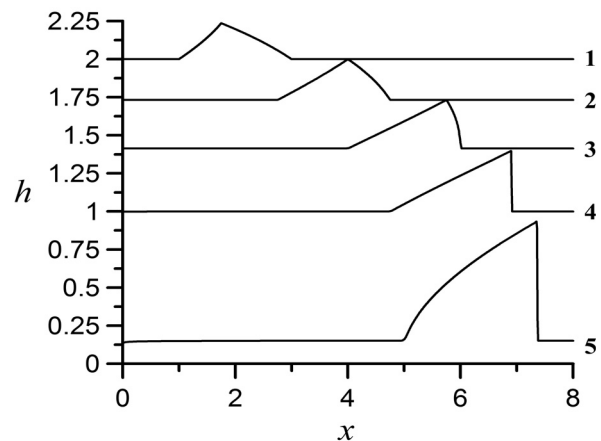


Рис.3 Профили решения (10), моделирующего стекание уединенной капли при испарении жидкости. Линия 1 –  $t_1 = 0$ , линия 2 –  $t_2 = 0.5$ , линия 3 –  $t_3 = 1.0$ , линия 4 –  $t_4 = 1.5$ , линия 5 –  $t_5 = 1.99$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена модельная задача о стекании тонкой пленки жидкости по вертикальной стенке с учетом тепломассопереноса на межфазной поверхности в режиме катящихся волн. Представлены семейства обобщен-

ных решений уравнения катящейся волны. Данные решения качественно моделируют стекание пленочного конденсата и испаряющейся пленки жидкости по вертикальной поверхности теплообмена.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Nusselt W. Zeitschrift der VDI. 60. – Н. 27-28. – 1916.
2. Алексеенко С.В., Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г. Волновое течение пленок жидкости. – Новосибирск: ВО “Наука”. Сибирская издательская фирма, 1992. – 256 С. Alekseenko S.V., Nakoryakov V.E., Pokusaev B.G. Wave Flow of Liquid Films. – New York: Begell House. – 1994. – 335 P.
3. Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журн. Эксперим. и теорет. физики. – 1948. – Т. 18. – № 1. – С. 3-28. Kapitza P.L. Wave Motion of a Thin Layer of a Viscous Liquid – Part I. // Zh. Eksp. Teor. Fiz. – 1948. – V. 18. – Is. 1. – P. 3-28.
4. Шкадов В.Л. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1967. – № 1. – С. 43-51. Shkadov V.Ya. Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity // Fluid dynamics. – 1967. – V. 2. – N 1. – P. 29-34.
5. Накоряков В.Е., Шрейбер И.Р. Волны на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости // ПМТФ. – 1973. – № 2. – С. 109-113. Nakoryakov V.E., Shreiber I.R. Waves on the surface of a thin layer of viscous liquid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics – 1973. – V. 14. – N 2. – P. 237-241.
6. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Алексеенко С.В. Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости // Инженерно-физический журнал – 1976. – Т.30. – N 5. – С.780-785. Nakoryakov V.E., Pokusaev B.G., Alekseenko S.V. Stationary two-dimensional rolling waves on a vertical film of fluid // Journal of Engineering

- Physics and Thermophysics. - 1976. - V.30. - No. 5. - P.517-521.
7. Бучин В.А., Шапошникова Г.А. Течение мелкой воды с периодической системой скачков по вертикальной поверхности // Доклады Российской Академии наук, - 2009. - Т. 426. - № 3. - С. 321-324. Buchin V.A., Shaposhnikova G.A. Flow of shallow water with a periodic system of jumps over a vertical surface // Doklady Physics - 2009. - V.54. - N 5. - P. 248-251.
  8. Ганчев Б.Г. Охлаждение элементов ядерных реакторов стекающими пленками - М. : Энергоатомиздат, 1987. - 191 С. Gantchev B.G. Cooling of Nuclear Reactor Elements By Falling Film Flow - Energoatomizdat: Moskva. - 1987. - 191 P.
  9. Nakoryakov V.E., Ostapenko V.V., Bartashevich M.V. Heat and mass transfer in the liquid film on a vertical wall in roll-wave regime // International Journal of Heat and Mass Transfer. - 2012. - V.55. - Is. 23-24. - P. 6514-6518.
  10. Остапенко В.В. Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды. - Новосибирск. Изд-во НГУ. - 2004. 180 С. Ostapenko V.V. Hyperbolic systems of conservation laws and their application to the shallow water theory. - Novosibirsk. - NSU. - 2004. - 180 P.