

УДК 519.6:532.546

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ СМЕШИВАЮЩЕГОСЯ ВЫТЕСНЕНИЯ

Гамзаев Х.М.

*Азербайджанская государственная нефтяная Академия, Баку, Азербайджан*

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается обратная задача, связанная с восстановлением начального и граничного условий для одномерного уравнения конвективной диффузии, описывающего процесс физико-химического метода воздействия на нефтяной пласт. Для реше-

ния задачи предлагается численный метод, основанный на использовании разностной схемы, дифференциальным приближением которой является уравнение гиперболического типа.

### ВВЕДЕНИЕ

Известно, что разработка нефтяных месторождений только за счет естественных источников пластовой энергии малоэффективна и позволяет получить небольшие конечные коэффициенты нефтеотдачи. Это связано с быстрым истощением начальных запасов пластовой энергии по мере отбора нефти из залежи. В практике нефтедобычи для повышения нефтеотдачи пластов применяют различные методы искусственного воздействия. В настоящее время физико-химические методы воздействия на нефтяные пласты считаются наиболее перспективными методами повышения нефтеотдачи пластов. Суть физико-химических методов воздействия состоит в закачивании в пласт различных химических реагентов и растворителей, увеличивающих подвижности нефти, улучшающих гидродинамические условия вытеснения ее вытесняющим агентом [1]. При применении физико-химических методов обычно стремятся приблизить процесс к вытеснению взаимно смешивающихся жидкостей и увеличить гидравлическое сопротивление фильтрации вытесняющей жидкости по сравнению с нефтью.

Для определения охвата пласта воздействием при осуществлении физико-химических методов, а также для расчета всех технологических показателей процесса необходимо знать поле концентрации растворителя в пласте. Однако определить распределение концентрации в пласте экспериментальным путем невозможно ввиду того, что процесс

физико-химического воздействия осуществляется на значительных глубинах и не может быть проконтролирован.

В связи с этим очень важное значение имеют вопросы компьютерного моделирования физико-химических методов воздействия на нефтяные пласты. Необходимо отметить, что при моделировании многие процессы физико-химического воздействия представляются как процесс фильтрации одной фазы с двумя компонентами и для описания этих процессов используют дифференциальное уравнение конвективной диффузии [2]. А для однозначного определения поле концентрации растворителя в пласте дифференциальное уравнение дополняется начальным и граничным условиями. Однако ввиду того, что доступ к нефтяному пласту ограничен и возможен только через скважины, вскрывающие пласт в малых областях, начальное распределение концентрации в пласте, а также ее значения на границе пласта не доступны для непосредственного измерения. Следовательно, точные представления условия на границе пласта и начальное условие для концентрации растворителя практически не представляется возможными.

В связи с этим для практики разработки нефтяных пластов физико-химическими методами очень важное значение имеет определение поле концентрации растворителя в пласте только на основании информации, полученной из скважины.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть, в горизонтальный нефтяной пласт через галерею скважин, расположенную в сечении  $x = 0$ , непрерывно закачивается растворитель. Растворитель смешивается с нефтью, и в пласте образуется однофазное течение с двумя компонентами: нефть

и растворитель. Предположим, что пласт не деформируется, растворитель не взаимодействует с твердым скелетом пористой среды, а нефть и растворитель являются несжимаемыми. Тогда в качестве математической модели данного процесса можно

использовать следующее одномерное уравнение конвективной диффузии [2]

$$m \frac{\partial c}{\partial t} = Dm \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u \frac{\partial c}{\partial x},$$

$$0 < x < L, \quad (1)$$

$$t > 0,$$

где  $c(x,t)$  - объемная концентрация растворителя в пласте;  $D$  - коэффициент диффузии;  $m$  - коэффициент пористости;  $u$  - скорость единственной фазы.

Предположим, что концентрация растворителя на галерее, а также скорость нагнетания растворителя в пласт через галерею изменяются с течением времени по заданным законам, т.е. для уравнения (1) имеем следующие условия

$$c|_{x=0} = c_w(t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

### МЕТОД РЕШЕНИЯ

Уравнение (1) и условие (2), (3) представим в безразмерной форме. Введем следующие безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{t}{t^*}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u^*},$$

$$\bar{v} = \frac{v}{u^*}, \quad u^* = \frac{Dm}{L}, \quad t^* = \frac{L^2}{D},$$

где  $t^*, u^*$  - характерные размерные величины.

Опуская черточки над безразмерными переменными задачи (1)- (3) запишем в виде

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (4)$$

$$G = \{0 < x < 1, \quad t > 0\}$$

$$c|_{x=0} = c_w(t), \quad t \geq 0, \quad (5)$$

$$-\frac{\partial c}{\partial x} + uc|_{x=0} = v(t), \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Для численного решения (4)-(6) используем подход, предложенный в [5]. Введем в области  $G$  равномерную разностную сетку

$$\omega_{h\tau} = \left\{ (t_j, x_i) : x_i = ih, \quad t_j = j\tau, \right. \\ \left. i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

с шагами:  $h$  по переменному  $x$  и  $\tau$  по переменному  $t$ . Вводя вещественный параметр  $\gamma$  разностный аналог уравнения (4) на сетке  $\omega_{h\tau}$  представим в следующем виде

$$-mD \frac{\partial c}{\partial x} + uc|_{x=0} = v(t), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

где  $v(t)$  - скорость нагнетания растворителя.

В связи с тем, что начальное распределение концентрации растворителя в пласте, а также закон изменения концентрации во времени в сечении пласта  $x = L$  неизвестны, сформулировать начальное и граничное условия для уравнения (1) не представляется возможным.

Таким образом, задача определения поле концентрации растворителя в пласте сводится к решению уравнения (1) при выполнении условий (2), (3). Задача (1)- (3) относится к классу граничных обратных задач без начальных условий [3], [4].

$$(1-\gamma) \frac{c_i^{j+1} - c_i^j}{\tau} + \gamma \frac{c_i^j - c_i^{j-1}}{\tau} =$$

$$= \frac{c_{i+1}^j - 2c_i^j + c_{i-1}^j}{h^2} - u \frac{c_i^j - c_{i-1}^j}{h}, \quad (7)$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1,$$

где  $c_i^j \approx c(x_i, t_j)$ .

Аппроксимируя условия (5), (6) будем иметь

$$c_0^j = c_w(t_j),$$

$$-\frac{c_1^j - c_0^j}{h} + uc_0^j = v(t_j), \quad (8)$$

$$j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, задаче (4)- (6) поставили в соответствие разностную схему (7)- (8). Необходимо отметить, что при помощи разложения членов в уравнении (7) как функций двух независимых переменных в ряды Тейлора в окрестности точки  $(x_i, t_j)$  можно получить дифференциальное приближение разностного уравнения (7). При  $\gamma < 1/2$  дифференциальным приближением разностного уравнения (7) является следующее дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$\varepsilon \frac{\partial^2 c_\varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2 c_\varepsilon}{\partial x^2} - u \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial x}, \quad (9)$$

где  $\varepsilon = \tau(1 - 2\gamma)/2$ .

Следовательно, задача с начальными условиями

$$c_\varepsilon|_{x=0} = c_w(t),$$

$$-\frac{\partial c_\varepsilon}{\partial x} + uc_\varepsilon|_{x=0} = v(t), \quad (10)$$

для уравнения (9), а также эквивалентная в известном смысле ей разностная задача (7)- (8) являются корректно поставленными.

Известно, что точное значение решения задачи (9), (10) в произвольной точке  $A$  с координатами  $(t, x)$  определяется начальными данными  $c_w(t)$  и  $v(t)$ , заданными на отрезке прямой  $x = 0$ , высекаемом характеристиками

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

проходящими через точку  $A(t, x)$  (рис.1). Полученный при этом треугольник  $ABC$  является треугольником определенности дифференциального уравнения (9) для точки  $A(t, x)$ .

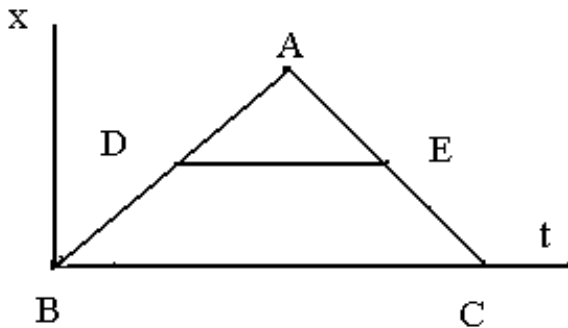


Рис.1 Треугольник определенности дифференциального уравнения (9)

Предполагая существование решение задачи (9),(10) можно доказать ее единственность в треугольнике  $ABC$ .

Разностному уравнению (7) соответствует шаблон  $\times \times \times$ , где крестики указывает, что уравнение (7) в узловой точке  $(t_j, x_i)$  связывает между собою значения искомой функции в пяти точках:  $(t_{j-1}, x_i)$ ,  $(t_j, x_{i-1})$ ,  $(t_j, x_i)$ ,  $(t_{j+1}, x_i)$ ,  $(t_j, x_{i+1})$ . Так как разностное уравнение (7) однозначно определяет  $c_{i+1}^j$ , то численную реализацию разностной схемы (7), (8) можно осуществить по формулам

$$\begin{aligned} c_{i+1}^j &= \frac{h^2(1-\gamma)}{\tau} c_i^{j+1} - \frac{h^2\gamma}{\tau} c_i^{j-1} - \\ &- (1+hu)c_{i-1}^j + \left(2+hu + \frac{(2\gamma-1)h^2}{\tau}\right) c_i^j, \\ c_0^j &= c_w(t_j), \\ c_1^j &= (1+uh)c_0^j - hv(t_j). \end{aligned} \quad (11)$$

Предположим, что в произвольной узловой точке  $A$  с координатами  $(t_m, x_n)$ , где  $n \geq 2$ ,  $m \geq 1$ ,

нужно вычислить значение  $c_n^m$ , пользуясь формулами (11). Положим  $i = n - 1$ . Тогда из (11) следует, что  $c_n^m$  определяется значениями  $c_{n-1}^{m-1}$ ,  $c_{n-1}^m$ ,  $c_{n-1}^{m+1}$ ,  $c_{n-2}^m$ . Если  $n - 2 > 1$ , то значения  $c_{n-1}^{m-1}$ ,  $c_{n-1}^m$ ,  $c_{n-1}^{m+1}$ ,  $c_{n-2}^m$  в свою очередь по формулам (11) могут быть выражены через значения на низших слоях  $c_{n-2}^{m-2}$ ,  $c_{n-2}^{m-1}$ ,  $c_{n-2}^m$ ,  $c_{n-2}^{m+1}$ ,  $c_{n-3}^{m-1}$ ,  $c_{n-3}^m$ ,  $c_{n-3}^{m+2}$ ,  $c_{n-3}^{m+1}$ . В конечном счете значение  $c_n^m$  может быть выражено через значения  $c_0^j$  и  $c_1^j$  ( $j = m + l$ ,  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m - 1$ ). Все эти значения находятся внутри треугольника, вершина которого лежит в точке  $A$ , одна сторона лежит на прямой  $x = 0$ , две другие стороны проходят через точку  $A$  и образует с прямой  $x = 0$  углы  $APR$  и  $ARP$ , равные соответственно  $\arctg \frac{h}{\tau}$  и  $\arctg(-\frac{h}{\tau})$  (рис.2). Треугольник  $APR$  служит треугольником определенности разностной схемы (7), (8) для узловой точки  $A(t_m, x_n)$ . Таким образом, значение  $c_n^m$  в точке  $A(t_m, x_n)$  определяется начальными значениями  $c_0^j$  и  $c_1^j$ , лежащими на отрезках  $PR$  и  $FM$ .

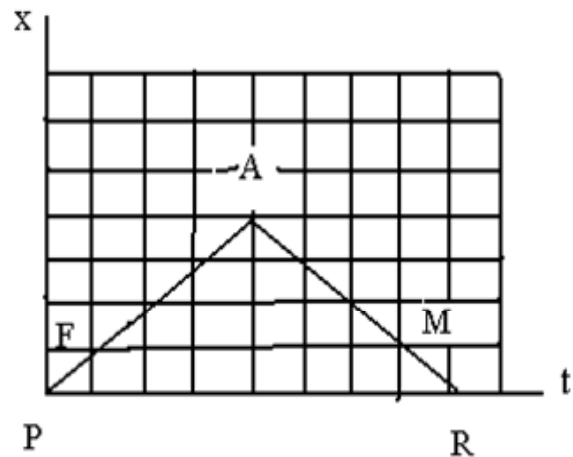


Рис.2. Треугольник определенности разностной схемы (7), (8)

Разностная схема (7), (8) является явной и можно ожидать, что численная реализация этой схемы по формулам (11) возможна лишь при определенных ограничениях на  $h$  и  $\tau$ . Для установления устойчивости численной реализации разностной схемы (7), (8) можно использовать условие, сформулированное Курантом, Фридрихсом и Леви [6]. Согласно условию Куранта- Фридрихса- Леви численная реализация явной разностной схемы (7), (8)

будет устойчива, если треугольник определенности дифференциального уравнения (9) для произвольной точки  $A(t_m, x_n)$  содержится внутри треугольника определенности разностной схемы (7), (8) для точки  $A(t_m, x_n)$ . А это условие будет выполняться при

$$\frac{h}{\tau} \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Следовательно, условием устойчивости разностной схемы (7), (8) будет следующее условие, налагающее на шаги  $h$  и  $\tau$  ограничение

$$\frac{h^2}{\tau} \leq \frac{2}{1-2\gamma}. \quad (14)$$

При построении разностной схемы для задачи (4)- (6) предполагается, что решение задачи (4)- (6) отыскивается при  $t \geq 0$ , причем  $t = 0$  соответствует неизвестному начальному распределению растворителя. Однако, как видно из рисунка, узловые точки лежащие на прямой  $t = 0$  не принадлежат треугольникам определенности разностной схемы (7), (8). Следовательно, вычислить значения искомой функции  $c(x, t)$  при  $t = 0$ ,  $x \in [0, 1]$  по формуле (11) не представляется возможным.

В связи с этим продолжим решение задачи (4)- (6) для  $t < 0$ , т.е. распределение растворителя в пласта представим как результат предыдущего состояния, продолжение которого для последующих значений времени управляется теми же законами. В области  $\{0 \leq x \leq 1, t < 0\}$  также введем равномер-

ную разностную сетку с шагами  $h$ ,  $\tau$  и координаты узловых точек  $(t_j, x_i)$  определим по формулам  $x_i = ih$ ,  $t_j = j\tau$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 0, -1, -2, \dots$

Очевидно, что разностный аналог задачи (4), (6) на вновь введенной разностной сетке также будет записываться в виде (7), (8), а значения искомой функции в вновь введенных узловых точках определяются по формулам (11). После расширения сеточной области для каждой узловой точки  $(0, x_n)$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ , лежащей на прямой  $t = 0$ , будем иметь треугольник определенности с вершиной в точке  $(0, x_n)$  и основанием отрезка прямой  $x = 0$ , проходящей через точки  $(-n\tau, 0)$  и  $(n\tau, 0)$ . Так как в каждом треугольнике решение системы разностных уравнений (7), (8) определяется однозначно, то по формулам (11) можно вычислить значения  $c_2^0, c_3^0, \dots, c_N^0$ , т.е. значения искомой функции при  $t = 0$ .

Предложенный разностный метод решения обратной задачи (4)- (6) опробован на модельных примерах. Проведенные численные расчеты показывают, что значения искомой функции в начальный момент времени и на границе определяются достаточно большой точностью.

Таким образом, на основе предложенной разностной схемы, дифференциальным приближением которой является уравнение гиперболического типа, можно найти распределение концентрации растворителя в пласте при физико-химическом воздействии в любой момент времени.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мирзаджанзаде А.Х., Аметов И.М., Ковалев А.Г. Физика нефтяного и газового пласта. М.: Недра, 1992, 270 с.
2. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.: Недра, 1982, 407с.
3. Латтес Р., Лионс Ж.Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970, 335с.
4. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988, 288 с.
5. Гамзаев Х.М. Разностный метод решения одной обратной задачи двухфазной фильтрации //Материалы международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления». Часть 1. стр.141–143. Алматы, 2009.
6. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977, 440 с.