

УДК 551.509.313

ЭКОНОМИЧНАЯ СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ НЕГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ

Бурштейн А.Б., Бурштейн Л.Х.*Университет Пелотаса, Пелотас, Бразилия*

АННОТАЦИЯ

В данной работе исследуется применение методов расщепления в рамках полунявного подхода с целью построения вычислительно эффективной численной схемы для модели крупномасштабной динамики атмосферы. Приведено описание предложенного численного алгоритма и обсуждение его свойств устойчивости и аппроксимации. Проведенные численные эксперименты с реальными атмосферными полями давления, температуры и ветра

показали, что предложенная схема позволяет давать прогноз с высокой точностью при использовании достаточно больших временных шагов, выбранных в соответствии с требованиями физической аппроксимации. Сравнение со стандартным полунявным методом и более явным алгоритмом продемонстрировало преимущества разработанной схемы.

ВВЕДЕНИЕ

Атмосфера Земли представляет собой сложную динамическую систему, в которой наблюдаются движения различных пространственных и временных масштабов, включая наиболее важные погодообразующие явления. Наиболее полной математической моделью атмосферы, отражающей движения всех наблюдаемых масштабов, является так называемая негидростатическая модель, в которой отсутствует предположение о гидростатическом балансе, традиционное для моделей прогноза погоды. Эта модель включает уравнения Эйлера для невязкой сжимаемой вращающейся жидкости, а также уравнение внутренней энергии и уравнение состояния для идеального газа. Анализ линеаризованных уравнений данной модели выявляет три типа волн: акустические, гравитационные и инерционные волны, из которых только последние связаны с погодообразующими процессами. Указанные волны различаются не только причиной своего формирования, но также и такими важными характеристиками как скорость распространения и энергетическая значимость. Так, характерная скорость распространения акустических волн в Земной атмосфере - около 330-340 м/с, гравитационных волн - менее 330 м/с, и максимальная скорость инерционных процессов (адвекции и волн Россби) - до 60 м/с [9, 11]. В то же время, из оценок спектра колебаний Земной атмосферы известно, что энергия акустических волн пренебрежима для подавляющего большинства процессов, гравитационные волны содержат малую часть доступной энергии, и инерционные явления являются наиболее значимыми, включая до 90% энергии атмосферы [9, 11]. Таким образом, с математической точки зрения, проблема

прогноза погоды является "жесткой" ("stiff") задачей.

Свойство жесткости совместно со свойством нелинейности налагают жесткие ограничения на выбор численных методов решения. Временной шаг схемы приближенно определяется отношением между шагом пространственной сетки и максимальной скоростью процессов, аппроксимированных явным образом. Эта зависимость называется условием Куранта и имеет следующий вид [6, 7]:

$$\tau \leq h/c_{\max \text{exp}},$$

где τ - временной шаг, h - пространственный шаг и $c_{\max \text{exp}}$ - максимальная скорость явно аппроксимированных волн. Для многих неявных схем нет ограничения на временной шаг, но в этом случае решение нелинейных уравнений на каждом временном шаге является сложной задачей, требующей больших вычислительных затрат. По этой причине полностью неявные схемы не используются в атмосферном моделировании. С другой стороны, полностью явные схемы обеспечивают простые и быстрые вычисления на каждом временном шаге, но этот шаг должен быть слишком малым (менее 1 сек при типичном вертикальном разрешении $h_v \approx 400$ метров) в соответствии с условием Куранта, определяемым в этом случае скоростью акустических волн [7, 15]:

$$\tau \leq h_v/c_{\max \text{acoust}}$$

Чтобы решить эту дилемму, используются полунявные схемы, в которых линейные члены, ответственные за наиболее быстрые волны, аппрок-

симируются неявно, а оставшиеся члены - явно. Применяя, например, неявную аппроксимацию к основным линейным членам по вертикали, можно увеличить временной шаг почти на два порядка (около 1 мин для типичного горизонтального решения $h_h \approx 20$ км), так как условие Куранта будет определяться горизонтальной скоростью гравитационных волн [8, 13, 15]:

$$\tau \leq h_h / c_{\max \text{ grav}} .$$

Ценой этого улучшения является необходимость решать на каждом временном шаге системы линейных уравнений с узкополосными (обычно 3-х или 5-ти диагональными) матрицами, что может быть легко выполнено с минимальными вычислительными затратами, используя метод прогонки. Однако этот временной шаг все еще слишком мал по сравнению с физически допустимым шагом, выбранным из соображений точности аппроксимации.

Неявная аппроксимация всех основных линейных членов позволяет дополнительно увеличить временной шаг до 6 мин. (при том же горизонтальном шаге 20 км) [7, 14]:

$$\tau \leq h_h / c_{\max \text{ adv}} ,$$

так как в этом случае в критерий Куранта входит только максимальная скорость адвекции $c_{\max \text{ adv}}$. Это достаточно большой шаг, сравнимый с требованиями точности, но такая аппроксимация приводит к решению линейных систем высокого порядка с широкополосными матрицами, что является вычислительно неэкономичной задачей.

Необходимо отметить, что полу неявные схемы в общем обеспечивают ту же практическую точность решений, что и явные схемы с тем же порядком аппроксимации. Поэтому они так популярны в атмосферном моделировании. Тем не менее, когда предел их эффективности исчерпан, как в вышеуказанном случае неявной аппроксимации всех линейных членов, приходится применять дополнительно техники расщепления, чтобы ускорить процесс численного прогноза. Обычно применение расщеп-

ления приводит к дополнительным ошибкам аппроксимации, которые часто пропорциональны временному шагу, и для требуемых больших временных шагов достигают уровня, когда численное решение теряет требуемую точность. В таких случаях, схема является устойчивой для больших временных шагов и формально сохраняет тот же порядок аппроксимации, что и нерасщепленная схема, но практическая точность решений может резко ухудшиться. Для схем расщепления трудно заранее определить, приведет ли дополнительная ошибка аппроксимации к ухудшению практической точности для требуемых временных шагов. Поэтому основным критерием оценки точности в данном случае является численный эксперимент (хотя теоретическая оценка порядка аппроксимации и устойчивости продолжают оставаться необходимыми предварительными элементами в построении схемы) [7, 13, 15].

В данной работе предлагается дополнительное вертикальное расщепление трехмерных эллиптических задач, возникающих при неявной аппроксимации всех линейных членов. Это позволяет свести трехмерные задачи к набору отдельных двумерных эллиптических задач, решение которых значительно эффективней и может быть выполнено с помощью многосеточных методов. Кроме того, такое расщепление соответствует вертикальному разделению спектра атмосферных волн на основные (баротропная и первые бароклинные) вертикальные моды и вторичные. Скорость распространения гравитационных волн в первых модах намного больше, и эти моды несут основную часть атмосферной энергии [9, 16]. Поэтому, применяя неявную аппроксимацию для основных мод (т.е. решая соответствующие двумерные эллиптические задачи) и явную аппроксимацию для медленных вторичных вертикальных мод (что исключает необходимость решения соответствующих им линейных систем), удастся построить экономичный численный алгоритм. Проведенные численные эксперименты показывают, что используемое дополнительное вертикальное расщепление не приводит к ухудшению качества прогнозов и позволяет сократить время вычисления прогнозируемых атмосферных полей.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ НЕГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЫ

Уравнения количества движения для невязкой жидкости в неинерционной системе координат, связанной с вращающейся Землей, могут быть записаны в следующем виде [7, 11]:

$$u_t = \bar{f}v - R\bar{T}P_x + N_u, \quad (1)$$

$$v_t = -\bar{f}u - R\bar{T}P_y + N_v, \quad (2)$$

$$w_t = \frac{g}{T}T - R\bar{T}P_z + N_w. \quad (3)$$

Уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости имеет вид:

$$P_t = -\frac{c_p}{c_v}(u_x + v_y + w_z) + \frac{g}{RT}w + N_p. \quad (4)$$

Уравнение термодинамики с учетом уравнения состояния идеального газа может быть записано в виде:

$$T_t = \frac{R\bar{T}}{c_p} \cdot P_t - \frac{g}{c_p}w + N_T. \quad (5)$$

Здесь использованы следующие стандартные обозначения:

- независимые переменные: t - координата времени, x, y, z - декартовы пространственные координаты;
- неизвестные функции: u, v, w - компоненты скорости, $P = \ln p$ - логарифм давления, T - температура;
- заданные параметры задачи: f - параметр Кориолиса со средним значением $\bar{f} = const$, g - ускорение силы тяжести, $\bar{T} = const$ - выбранное характеристическое значение температуры, R -

СТАНДАРТНАЯ ПОЛУНЕЯВНАЯ СХЕМА

Стандартная трехслойная полунеявная временная аппроксимация 2-го порядка точности для прогностических уравнений (1)-(5) имеет следующий вид [14, 15]:

$$\frac{u^\tau - u^{-\tau}}{2\tau} = \bar{f} \frac{v^\tau + v^{-\tau}}{2} - R\bar{T} \frac{P_x^\tau + P_x^{-\tau}}{2} + N_u, \quad (6)$$

$$\frac{v^\tau - v^{-\tau}}{2\tau} = -\bar{f} \frac{u^\tau + u^{-\tau}}{2} - R\bar{T} \frac{P_y^\tau + P_y^{-\tau}}{2} + N_v, \quad (7)$$

$$\frac{w^\tau - w^{-\tau}}{2\tau} = \frac{g}{\bar{T}} \frac{T^\tau + T^{-\tau}}{2} - R\bar{T} \frac{P_z^\tau + P_z^{-\tau}}{2} + N_w, \quad (8)$$

$$\frac{P^\tau - P^{-\tau}}{2\tau} = -\frac{c_p}{c_v} \frac{D^\tau + D^{-\tau}}{2} - \frac{c_p}{c_v} \frac{w_z^\tau + w_z^{-\tau}}{2} + \frac{g}{RT} \frac{w^\tau + w^{-\tau}}{2} + N_P, \quad (9)$$

$$\frac{T^\tau - T^{-\tau}}{2\tau} = \frac{R\bar{T}}{c_p} \frac{P^\tau - P^{-\tau}}{2\tau} - \frac{g}{c_p} \frac{w^\tau + w^{-\tau}}{2} + N_T. \quad (10)$$

Здесь $D = u_x + v_y$ - горизонтальная дивергенция, τ - шаг по времени, верхний индекс “ τ ” обозначает значения функций на последующем временном

ПОЛУНЕЯВНАЯ СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ

Полуявный шаг

Хотя схема (6)-(10) является достаточно эффективной по сравнению с более явными схемами, ей присущи сложные вычисления, связанные с решением трехмерных эллиптических задач, возникающих в результате неявной аппроксимации линейных членов. Так как часть этих членов связана с медленно распространяющимися внутренними гравитационными волнами, то количество вычислений можно уменьшить, применив вертикальное расщепление, которое позволяет аппроксимировать раз-

газовая постоянная сухого воздуха, c_p и c_v - удельная теплота при постоянном давлении и объеме, соответственно;

- нелинейные члены N_u, N_v, N_w, N_T представляют в основном адвективные члены в каждом уравнении, специфическая форма которых не понадобится при последующем представлении схемы.

уровне $t_{n+1} = (n+1)\tau$, верхний индекс “ $-\tau$ ” обозначает значения функций на предыдущем временном уровне $t_{n-1} = (n-1)\tau$, и функции без верхнего индекса рассчитываются на текущем временном уровне $t_n = n\tau$:

$$\varphi^\tau = \varphi(t_{n+1}, x, y, z), \quad \varphi = \varphi(t_n, x, y, z),$$

$$\varphi^{-\tau} = \varphi(t_{n-1}, x, y, z), \quad \varphi = u, v, w, P, T.$$

Таким образом, схема (6)-(10) представляет совместное использование неявной аппроксимации Кранка-Николсона с удвоенным временным шагом для линейных членов и явной аппроксимации типа "чехарда" (leap-frog) для нелинейных членов и линейных членов с переменными коэффициентами.

Анализ линейной устойчивости показывает, что временной шаг данной схемы ограничен условием:

$$\tau \leq \frac{h_h}{c_{\max adv}},$$

что для горизонтального шага $h_h \approx 20$ км и максимальной скорости адвекции $c_{\max adv} \approx 50$ м/с дает максимальный временной шаг около 6 мин.

личным образом основные (быстрые) и вторичные (медленные) вертикальные моды. Такой подход с успехом применялся в более простых гидростатических моделях атмосферы [3, 4, 5, 10, 12]. Для реализации вертикального расщепления каждый временной шаг удобно разделить на два этапа. На первом этапе применяется полуявная аппроксимация, т.е. схема "чехарда" применяется ко всем членам, за исключением тех, которые ответственны за вертикальное распространение акустических волн и аппроксимированы по схеме Кранка-Николсона:

$$\frac{\hat{u}^\tau - u^{-\tau}}{2\tau} = \bar{f}v - R\bar{T}P_x + N_u, \quad (11)$$

$$\frac{\hat{v}^\tau - v^{-\tau}}{2\tau} = -\bar{f}u - R\bar{T}P_y + N_v, \quad (12)$$

$$\frac{\hat{w}^\tau - w^{-\tau}}{2\tau} = \frac{g}{\bar{T}} \frac{\hat{T}^\tau + T^{-\tau}}{2} - R\bar{T} \frac{\hat{P}_z^\tau + P_z^{-\tau}}{2} + N_w, \quad (13)$$

$$\frac{\hat{P}^\tau - P^{-\tau}}{2\tau} = -\frac{c_p}{c_v} D - \frac{c_p}{c_v} \frac{\hat{w}_z^\tau + w_z^{-\tau}}{2} + \frac{g}{R\bar{T}} \frac{\hat{w}^\tau + w^{-\tau}}{2} + N_P, \quad (14)$$

$$\frac{\hat{T}^\tau - T^{-\tau}}{2\tau} = \frac{R\bar{T}}{c_p} \frac{\hat{P}^\tau - P^{-\tau}}{2\tau} - \frac{g}{c_p} \frac{\hat{w}^\tau + w^{-\tau}}{2} + N_T. \quad (15)$$

Вычисления на этом этапе намного более экономичны, чем в стандартной полуявной схеме (6)-(10). Действительно, последние три уравнения отщепляются от системы и могут быть решены отдельно. Неизвестные в них связаны только по вертикали, и поэтому решение уравнений (13)-(15) сводится к решению множества отдельных одномерных краевых задач, что можно осуществить эффективным образом с помощью метода прогонки. После решения уравнений (13)-(15), оставшиеся уравнения представляют явные соотношения для горизонтальных компонент скорости. Дефект этого этапа заключается в его слабой устойчивости [8, 13]:

$$\tau \leq \frac{h_h}{c_{\max \text{ grav}}},$$

что для горизонтального шага $h_h \approx 20$ км и максимальной скорости гравитационных волн адвекции $c_{\max \text{ grav}} \approx 300$ м/с дает максимальный временной шаг около 1 мин.

Уравнения поправок

Чтобы улучшить устойчивость полуявного этапа, необходимо применить более неявную аппроксимацию, например, как в стандартной полуявной схеме. Сформировав разности (поправки) между прогностическими значениями схем (6)-(10) и (11)-(15), получим для них следующие уравнения:

$$u^* - \bar{f}v^* + \bar{\alpha}R\bar{T}P_x^* = L_u, \quad (16)$$

$$v^* + \bar{f}u^* + \bar{\alpha}R\bar{T}P_y^* = L_v, \quad (17)$$

$$w^* - \tau \frac{g}{\bar{T}} T^* + \bar{\alpha}R\bar{T}P_z^* = L_w, \quad (18)$$

$$P^* + \tau \frac{c_p}{c_v} D^* + \tau \frac{c_p}{c_v} w_z^* - \tau \frac{g}{R\bar{T}} w^* = L_P, \quad (19)$$

$$T^* - \frac{R}{c_p} \bar{T}P^* + \tau \frac{g}{c_p} w^* = L_T, \quad (20)$$

где $\varphi^* = \varphi^\tau - \hat{\varphi}^\tau$, $\varphi = u, v, w, T, P$ есть искомые поправки, и линейные члены L_φ не включают прогностических значений полуявной схемы:

$$L_u = \bar{f}v - \bar{\alpha}R\bar{T}P_x, \quad L_v = -\bar{f}u - \bar{\alpha}R\bar{T}P_y, \quad L_w = 0,$$

$$L_P = -\tau \frac{c_p}{c_v} \bar{D}, \quad L_T = 0;$$

$$\tilde{\varphi} = \hat{\varphi}^\tau - 2\varphi + \varphi^{-\tau}, \quad \varphi = u, v, w, T, P.$$

Считая, что прогностические величины первого этапа $\hat{\varphi}^\tau$ уже посчитаны по формулам (11)-(15), уравнения (16)-(20) представляют линейную систему для поправок φ^* . Очевидно, решение этой системы эквивалентно нахождению прогностических значений полуявной схемы (6)-(10), но, как было отмечено, это требует вычислительно емкого решения трехмерной краевой задачи. Однако, применение вертикального расщепления позволяет существенно уменьшить количество требуемых вычислений без потери точности и устойчивости численного решения.

Первым шагом для вертикального расщепления является исключение неизвестных w^* и T^* из уравнений (18)-(20), что приводит к следующему уравнению для P^* :

$$-P_{zz}^* + \frac{g}{R\bar{T}} P_z^* + \frac{c_p}{c_p} \frac{1}{\tau^2 R\bar{T}} P^* + \frac{1}{\bar{\alpha}R\bar{T}} \left(1 + \tau^2 \frac{g^2}{c_p \bar{T}} \right) D^* = L_1.$$

Можно показать, что спектр соответствующей задачи Штурма-Лиувилля

$$-P_{zz}^* + \frac{g}{R\bar{T}} P_z^* = \lambda P^*, \quad z \in (0, z_{up}), \quad (21)$$

$$P_z^* - \frac{g}{c_p \bar{T}} P^* = 0, \quad z = 0, \quad z = z_{up} \quad (22)$$

(где краевые условия (22) представляют граничные условия $w = 0$ на верхней $z = 0$ и нижней $z = z_{up}$ границах, переписанные для P^*), является простым и положительным. Более того, собственные числа быстро убывают к единственной нулевой предельной точке. Это свойство существенно используется для выборочной корректировки вертикальных мод.

Вертикальное расщепление

На втором этапе вертикально расщепленной схемы используется разложение по собственным функциям $F_k(z)$ задачи (21)-(22)

$$\varphi^* = \sum_k \varphi_k^+(x, y) F_k(z), \quad \varphi = u, v, P, L,$$

которое позволяет переписать уравнения для поправок в виде

$$u^+ - \bar{g}v^+ + \bar{\tau} \bar{T} P^+_x = L^+_u, \quad (23)$$

$$v^+ + \bar{g}u^+ + \bar{\tau} \bar{T} P^+_y = L^+_v, \quad (24)$$

$$\bar{R} \bar{T} P^+ + \tau c_k^2 (u^+_x + v^+_y) = L^+_P. \quad (25)$$

В последних уравнениях индекс "k" опущен у всех членов, за исключением c_k , для упрощения обозначений.

Каждая из систем (23)-(25) может быть решена отдельно от других и представляет временную дискретизацию линеаризованных уравнений мелкой воды с соответствующей скоростью распространения гравитационных волн c_k . Внутренние вертикальные моды (соответствующие большим значениям "k") содержат медленные гравитационные волны и малую долю доступной энергии. Поэтому они не влияют на устойчивость и слабо влияют на точность схемы. Вследствие этого, достаточно решить только несколько первых вертикальных систем (23)-(25) для того, чтобы существенно улучшить устойчивость полуявного шага (11)-(15). Действительно, анализ линейной устойчивости показывает, что решение первых I систем (23)-(25) позволяет увеличить временной шаг до

$$\tau \leq h_h / c_{I+1},$$

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Описанная выше численная схема была использована для прогноза атмосферных полей на ограниченной области с горизонтальной территорией $3000 \times 3000 \text{ км}^2$, покрывающей южную часть Бразилии и прилегающие районы (с центром в точке 30° ю.ш. и 55° з.д.) и вертикальным слоем простирающимся от поверхности Земли до высоты 15 км. Горизонтальное разрешение было выбрано однородным с шагом 20 км, и вертикальный слой был разделен на 30 подслоев различной толщины: более плотное разрешение использовалось в областях с повышенными вертикальными градиентами - у поверхности Земли и в районе тропопаузы. В качестве начальных данных использовались поля объективного анализа давления, температуры и ветра Национального Центра Прогноза Окружающей Среды США (NCEP), а в качестве краевых условий - поля глобального прогноза этого же Центра. Прогноз рассчитывался на 12, 24 и 36 часов, так как при большей заблаговременности определяющими факторами становятся краевые условия, что затрудняет оценку качества используемой численной схемы. С

где c_{I+1} - наибольшая скорость распространения гравитационных волн у тех вертикальных мод, которые остались нескорректированными. Например, корректируя первые пять вертикальных мод в 30-уровневой модели, можно повысить устойчивость схемы от 1 мин до 6 мин (так как $c_6 \approx 50 \text{ м/с}$), что практически эквивалентно условию устойчивости стандартной полуявной схемы. Таким образом, чтобы восстановить устойчивость расщепленной схемы после полуявного шага, достаточно решить менее 1/5 всех систем (23)-(25) для вертикальных мод, в то время как в стандартной полуявной схеме все эти моды аппроксимируются неявно.

Каждая из систем (23)-(25), которая подлежит корректировке, может быть сведена к 2-мерному уравнению типа Гельмгольца для неизвестной P^+ и решена эффективно путем использования многосеточного метода. Экономичный многосеточный метод для двумерных эллиптических задач, решаемых на равномерных сетках с произвольным числом узлов, описан, например, в [2]. После того как поправка P^+ найдена, поправки к компонентам скорости u^+ и v^+ вычисляются явным образом по первым двум формулам в (23)-(25). После этого, обратное вертикальное преобразование возвращает физические значения поправок давления и горизонтальной скорости, и, наконец, поправки температуры и вертикальной скорости рассчитываются по явным формулам (18) и (20).

целью минимизировать влияние краевых условий на полученные результаты, оценка прогнозов проводилась по внутренней области с горизонтальным размером $1000 \times 1000 \text{ км}^2$.

Для оценки точности и эффективности предложенной схемы, результаты прогнозов, полученных при ее использовании, сравнивались с результатами прогнозов по стандартной полуявной модели (6)-(10) и по полуявной схеме (11)-(15). Использовались стандартные оценки качества краткосрочных прогнозов для полей давления и температуры: среднеквадратичная ошибка (разность между полями прогноза и анализа) и коэффициент корреляции прогностических и реальных тенденций полей [1]. На Рис.1 приведены среднеквадратичные ошибки прогнозов геопотенциальной высоты для указанных трех схем на изобарической поверхности 500 гПа, которая является характерной поверхностью для оценки прогнозов в средней тропосфере.

На Рис.2 приведены среднеквадратичные ошибки прогнозов температуры для указанных

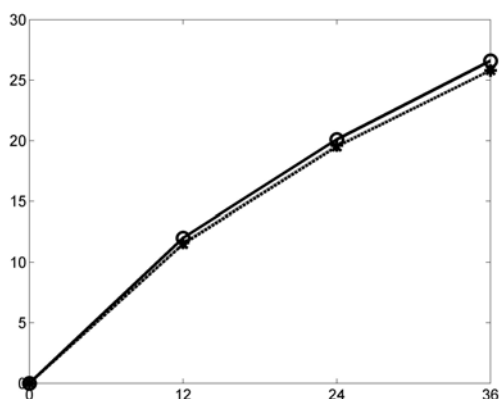


Рис.1. Среднеквадратичные ошибки прогнозов геопотенциальной высоты (в метрах) на уровне 500гПа, представленные как функции от заблаговременности прогноза. Сплошная линия (с "o") - полуявная схема, пунктирная линия (с "x") - стандартная полуявная схема, точечная линия (с "+") - расщепленная полуявная схема.

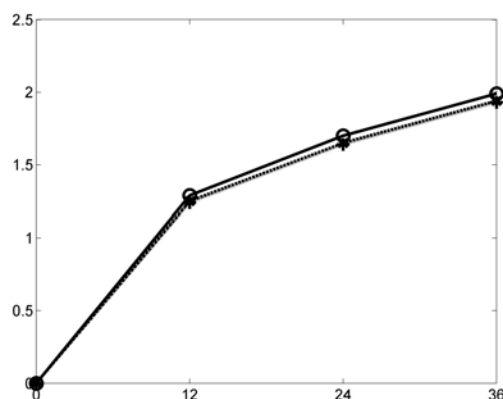


Рис.2. Среднеквадратичные ошибки прогнозов температуры (в градусах) на уровне 850гПа, представленные как функции от заблаговременности прогноза. Сплошная линия (с "o") - полуявная схема, пунктирная линия (с "x") - стандартная полуявная схема, точечная линия (с "+") - расщепленная полуявная схема.

трех схем на изобарической поверхности 850гПа. Прогнозы температуры на этой поверхности являются важной характеристикой для оценки конвективной активности в нижней тропосфере, которая влияет на формирование облачности и осадков в более полных неадиабатических моделях прогноза погоды.

Как видно из приведенных результатов, примененное вертикальное расщепление не вносит существенных дополнительных ошибок, и схема с расщеплением сохраняет точность присущую стандартной полуявной схеме - различие в точности между этими двумя схемами практически пренебрежимо. Аналогичные результаты получены и для кор-

реляции тенденций. Одновременно с этим, время расчета схемы с вертикальным расщеплением составляет всего 3/5 времени стандартной схемы. При наблюдаемой тенденции увеличения вертикального разрешения в современных моделях число вертикальных уровней часто достигает 40 или 50, что может привести к возрастанию эффективности расщепленной модели по сравнению со стандартной, так как количество быстрых вертикальных мод при этом остается почти неизменным, в то время как количество медленных мод значительно увеличивается в соответствии со свойствами спектра краевой задачи (21)-(22).

ЛИТЕРАТУРА

1. R.A.Anthes, Y.H.Kuo, E.Y.Hsie, S.Low-Nam, T.W.Bettge. Estimation of skill and uncertainty in regional numerical models. Q. J. R. Meteorol. Soc. 115, 1989, p.763-806.
2. V.Bandy, R.Sweet. A set of three drivers for BOXMG: a black box multigrid solver. Comm. Appl. Num. Meth. 8, 1992, p.563-571.
3. A.Bourchtein. Semi-Lagrangian semi-implicit space splitting regional baroclinic atmospheric model. Appl. Numer. Math. 41, 2002, p.307-326.
4. A.Bourchtein, L.Bourchtein. Semi-Lagrangian semi-implicit time-splitting scheme for a regional model of the atmosphere. J. Comput. Appl. Math., 227, 2009, p.115-125.
5. D.M.Burridge. A split semi-implicit reformulation of the Bushby-Timpson 10 level model. Q. J. R. Meteorol. Soc. 101, 1975, p.777-792.
6. M.Cullen. Modelling atmospheric flows. Acta Numerica 16, 2007, p.67-154.
7. D.Durrant Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics, Springer-Verlag, 1999.
8. A.Gassmann, H.J.Herzog A consistent time-split numerical scheme applied to the nonhydrostatic compressible equations. Mon. Wea. Rev. 135, 2007, p.20-36.
9. J.R.Holton. An Introduction to Dynamic Meteorology. Academic Press, 1992.
10. V.Kadychnikov, V.Losev. Application of the alternating direction implicit method to the numeri-

- cal regional weather forecast, *Meteorology and Hydrology* 9, 1991, p.26–33.
11. E.Kalnay. *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*. Cambridge University Press, 2002.
 12. L.M.Leslie, R.J.Purser. Three-dimensional mass-conserving semi-Lagrangian scheme employing forward trajectories. *Mon. Wea. Rev.* 123, 1995, p.2551-2566.
 13. W.C.Skamarock, J.B.Klemp. A time-split nonhydrostatic atmospheric model for weather research and forecasting applications. *J.Comp.Phys.* 227, 2008, p.3465-3485
 14. A.Staniforth, N.Wood. Aspects of the dynamical core of a nonhydrostatic, deep-atmosphere, unified weather and climate-prediction model. *J.Comp.Phys.* 227, 2008, p.3445-3464.
 15. J.Steppeler, R.Hess, U.Schattler, L.Bonaventura. Review of numerical methods for nonhydrostatic weather prediction models. *Meteorol. Atmos. Phys.* 82, 2003, p.287–301.
 16. D.L.Williamson, C.Temperton. Normal mode initialization for a multilevel grid-point model. Part II: nonlinear aspects. *Mon. Wea. Rev.* 109, 1981, p.744-757.